

И.А. Палий

Введение в линейное программирование

Учебное пособие

Омск – 2007

Федеральное агентство по образованию
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия
(СибАДИ)

И.А. ПАЛИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в областях «Экономика и управление» и «Техника и технологии»

Омск
Издательство СибАДИ
2007

УДК 519.85
ББК В173.1

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор
А.А. Колоколов; кафедра кибернетики Омского
государственного университета (зав. кафедрой – доктор физико-
математических наук, профессор А.К. Гуц)

Работа одобрена редакционно-издательским советом академии в качестве учебного пособия по дисциплинам “Теория принятия решений, «Экономико-математические методы», «Математическая экономика».

Палий И.А.

П 14 ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: Учебное пособие. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. – 200 с.

ISBN 978-5-93204-353-0

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения СибАДИ. Рассмотрены следующие разделы курса: математические модели задач линейного программирования, графическое решение задач линейного программирования, симплекс-метод, теория двойственности, метод потенциалов решения транспортной задачи, потоки в сетях, венгерский алгоритм решения транспортной задачи. Большое количество подробно разобранных примеров решения задач делает изложение живым и доступным.

Ил. 39. Библиогр.: 8 назв.

© И.А.Палий, 2007

ISBN 978-5-93204-353-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ	1
1. ЧТО ТАКОЕ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	2
1.1. Математическая модель задачи.....	2
линейного программирования	2
1.2 Примеры построений математических моделей	2
задач линейного программирования.....	2
1.3. Задачи.....	10
2. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ	21
2.1. Графическое решение ЗЛП с двумя переменными	21
2.2. Понятие об анализе на чувствительность	27
2.3. Задачи.....	36
3. ОПОРНЫЕ РЕШЕНИЯ (ОР)	44
3.1. Определение канонической формы ЗЛП.....	44
3.2. Приведение произвольной ЗЛП.....	45
к каноническому виду.....	45
3.3. Решение системы линейных уравнений по методу Гаусса (методу исключения неизвестных).....	48
3.4. Опорные решения.....	50
3.5. Переход от одного опорного решения к другому.....	52
3.6. Вырожденные и невырожденные опорные решения.....	54
3.7. Выражение целевой функции Z через свободные переменные.....	55
Оценки свободных переменных.....	55
3.8. Анализ значений целевой функции Z , выраженной через свободные переменные.	58
Признак неограниченности целевой функции.....	58
в допустимой области.....	58
3.9. Анализ значений целевой функции Z , выраженной через свободные переменные.....	61
Признак оптимальности опорного решения.....	61
3.10 Теорема о достижимости оптимального значения целевой функции ЗЛП на опорном решении	65
3.11. Задачи.....	71
4. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП	74
4.1 Описание симплекс-метода.....	74
4.2 Получение исходного ОР.	75
Метод искусственного базиса	75
4.3. Об альтернативных оптимальных решениях ЗЛП	77
4.4. Об анализе на чувствительность.....	79
4.5. Задачи.....	84

5.	ОСНОВЫ	ТЕОРИИ
ДВОЙСТВЕННОСТИ.....	85	
5.1.	Определение пары двойственных задач.....	85
5.2.	Несколько замечаний об умножении матриц	88
5.3.	Несколько замечаний о свойствах.....	90
	скалярного произведения векторов.....	90
5.4.	Теоремы двойственности.....	91
5.5.	Двойственный симплекс-метод	100
5.6.	Двойственность и анализ на чувствительность	102
5.7.	Задачи	106
6. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ РЕШЕНИЯ	ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ (ТЗ).....	119
6.1.	Математическая модель транспортной задачи	119
6.2.	Методы получения исходного.....	121
	допустимого решения ТЗ.....	121
6.3.	Задача, двойственная к ТЗ..	123
	Соотношения двойственности и.....	123
	описание метода потенциалов	123
6.4.	Циклы в матрице.....	128
6.5.	Описание метода потенциалов	136
6.6.	Еще один пример (блокирование перевозок).....	136
6.7.	Задачи	139
7. ПАРОСОЧЕТАНИЯ.....		151
7.1.	Определения и примеры	151
7.2.	Основная теорема о наибольших паросочетаниях	152
7.3.	Наибольшее паросочетание в двудольном графе	154
7.4.	Алгоритм отыскания увеличивающей	157
	цепи для паросочетания в двудольном графе	157
7.5.	Задача об оптимальных назначениях (ЗН).....	160
8. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ВЕНГЕРСКИЙ АЛГОРИТМ ЕЁ РЕШЕНИЯ ..		168
8.1.	Потоки в сетях.....	168
8.2.	Разрезы	170
8.3.	Теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном.....	172
разрезы.....		172
8.4.	Алгоритм Форда – Фалкерсона решения задачи о.....	176
	максимальном потоке (метод расстановки пометок).....	176
8.5.	Алгоритм Форда – Фалкерсона для транспортной сети, имеющей вид.....	180
	двудольного графа.....	180
8.6.	Венгерский алгоритм решения транспортной задачи.....	184
8.7.	Задачи.....	193

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Это учебное пособие составлено на основании многолетнего опыта чтения курсов «Математическое программирование» и «Экономико-математические методы и модели» студентам экономических специальностей СибАДИ. В настоящее время линейное программирование в СибАДИ излагается в следующих курсах: «Экономико-математические методы и модели» (для студентов экономических специальностей); «Математическая экономика» (для студентов специальности 351400 – «Прикладная информатика в экономике»); «Теория принятия решений» (для студентов специальностей 220200 – «Автоматизированные системы обработки информации и управления»; и 075500 – «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем»). Кроме того, материал, изложенный в этом пособии, используется в курсе «Дискретная математика», читаемом студентам специальности 075500 – «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

Рассматриваются следующие темы: построение математических моделей задач линейного программирования; графическое решение задач с двумя переменными; симплекс-метод; теория двойственности; метод потенциалов решения транспортной задачи; паросочетания; потоки в сетях; венгерский алгоритм решения задачи о назначениях и транспортной задачи.

Пособие содержит большое число задач и упражнений, поэтому оно будет полезным не только для обеспечения соответствующего лекционного курса, но и для проведения практических занятий, контрольных работ, при составлении вариантов расчетно-графических работ.

Использованная литература

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. *Бонди Б.* Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.
3. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщение и приложения. – М.: Прогресс, 1966.
4. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.
5. *Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
6. *Линейное и нелинейное программирование* /Под ред. *И.М. Ляшенко.* – Киев: Вища школа, 1976.

7. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985.
8. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.1. – М.: Мир, 1985.

1. ЧТО ТАКОЕ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Математическая модель задачи линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) ставится следующим образом. Требуется отыскать *условный экстремум* (максимум или минимум) *линейной целевой функции n переменных*.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max (\min). \quad (1.1)$$

При этом на переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ наложены *линейные ограничения*:

[illegible]

Здесь коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n; a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}; b_1, b_2, \dots, b_m$ – заданные числа, а величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные. Каждое из ограничений системы – одно из трех возможных: $\leq, =, \geq$.

Совокупность целевой функции (1.1) и системы ограничений (1.2) называется **математической моделью задачи линейного программирования**.

Любой набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющий системе ограничений (1.2), называется **допустимым решением** данной ЗЛП. Допустимое решение, на котором достигается требуемый экстремум целевой функции(1.1), называется **оптимальным решением** данной ЗЛП. Множество всех допустимых решений данной ЗЛП называется **допустимой областью**.

1.2. Примеры построения математических моделей задач линейного программирования

Пример 1. Задача распределения ресурсов.

Предприятие изготавливает n типов продукции, для производства которой требуется m видов сырья. Для изготовления единицы j -го типа продукции требуется a_{ij} единиц сырья i -го вида, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ (некоторые из чисел a_{ij} могут равняться нулю). Запасы сырья ограничены

и составляют b_i единиц для i -го вида сырья, $i=1, \dots, m$. Прибыль от реализации одной единицы продукции j -го типа равна c_j единиц, $j=1, \dots, n$. Сколько единиц продукции каждого вида нужно произвести, чтобы получить максимальную прибыль и уложиться в имеющиеся запасы ресурсов?

Описывая математическую модель задачи линейного программирования, будем последовательно определять неизвестные задачи, целевую функцию и систему ограничений.

Описание неизвестных. Неизвестно, сколько единиц продукции каждого типа нужно произвести. Обозначим эти величины через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Всего в задаче n неизвестных, x_j – количество единиц продукции j -го типа, $j=1, \dots, n$.

Описание целевой функции. Требуется максимизировать прибыль от реализации продукции. Если единица продукции первого типа приносит c_1 единиц прибыли, то прибыль от реализации x_1 единиц этой продукции составит $c_1 x_1$ единиц прибыли. Соответственно x_2 единиц продукции второго типа дадут $c_2 x_2$ единиц прибыли. Тогда прибыль от реализации всей продукции равна

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

Описание системы ограничений. Запасы сырья ограничены. Подсчитаем, сколько сырья первого вида уйдет на производство всей продукции. Если на производство единицы продукции первого типа требуется a_{11} единиц сырья первого вида, то на производство x_1 единиц этой продукции будет затрачено $a_{11} x_1$ единиц сырья первого вида. Для выпуска x_2 единиц продукции второго типа потребуется $a_{12} x_2$ единиц сырья первого вида. Чтобы произвести x_n единиц продукции n -го типа, нужно затратить $a_{1n} x_n$ единиц сырья первого вида. Всего же потребуется

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \text{ единиц сырья первого вида. Расход}$$

этого вида сырья не может превысить имеющегося запаса, должно выполняться неравенство $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$.

Подобным образом составляются ограничения по запасам сырья остальных видов.

Система ограничений такова:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

.....

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i;$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

Всего в системе m ограничений по запасам. Кроме того, необходимо добавить еще условие неотрицательности переменных; нельзя выпускать отрицательное число единиц продукции: $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$.

Пример 2. Задача о раскрое.

Для изготовления брусьев трех длин (0,2; 0,3 и 0,5 м) на распил поступили бревна длиной 1 м. Нужно получить не менее 150 и не более 200 брусьев длиной 0,1 м; не менее 200 и не более 300 брусьев длиной 0,3 м; не менее 300 и не более 330 брусьев длиной 0,5 м. Как распиливать бревна, чтобы обеспечить нужное число брусьев каждого размера и при этом минимизировать отходы?

Прежде всего, опишем все способы распила одного бревна. Например, бревно длиной 1 м можно распилить на 5 брусьев длиной 0,2 м, отходов в этом случае нет. Или можно получить 3 бруса длиной 0,3 м, тогда в отходы уйдет 0,1 м бревна. Варианты распила приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Способ распила	Количество брусьев длиной, м			Величина отходов, м
	0,2	0,3	0,5	
1	5	0	0	0
2	3	1	0	0,1
3	2	2	0	0
4	2	0	1	0,1
5	1	1	1	0
6	0	3	0	0,1
7	0	0	2	0

Опишем математическую модель задачи.

Описание неизвестных. Неизвестно, сколько бревен следует распиливать каждым из способов, указанных в табл. 1.1. Обозначим через x_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) количество бревен, распиленных j -м способом. Всего 7 неизвестных, каждое из них может принимать только целые значения: 0, 1, 2, 3,

Описание целевой функции. Требуется минимизировать суммарные отходы. Отходы остаются только в случае применения 2, 4, 6-го способов. Если распил одного бревна дает единицу отходов (0,1 м), то распил x_j бревен дает x_j единиц отходов. Суммарная величина отходов равна

$$Z = x_2 + x_4 + x_6 \rightarrow \min .$$

Описание системы ограничений. Всего брусьев длиной 0,2 м будет получено $5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5$ штук (6-й и 7-й способы распила не дают брусьев длиной 0,2 м). По условию число брусьев длиной 0,2 м должно лежать в пределах от 150 до 200, получаем два ограничения:

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 150;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 200.$$

Аналогично строятся ограничения по числу брусьев длиной 0,3 м и длиной 0,5 м.

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 200;$$

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \leq 300;$$

$$x_4 + x_5 + 2x_7 \geq 300;$$

$$x_4 + x_5 + 2x_7 \leq 330.$$

Добавим также условие неотрицательности и целочисленности переменных: $x_j \geq 0, x_j \in N, j = 1, 2, \dots, 7$.

Изменим теперь условие задачи. Пусть требуется получить ровно 150 брусьев длиной 0,2 м, 200 брусьев длиной 0,3 м, 300 брусьев длиной 0,5 м и при этом минимизировать суммарные отходы.

Пусть снова $x_1, x_2, \dots, x_7$ — количество бревен, распиленных по первому, второму, ..., седьмому способам соответственно. Тогда количество брусьев длиной 0,2; 0,3; 0,5 м будет соответственно таким:

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5;$$

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6;$$

$$x_4 + x_5 + 2x_7.$$

Так как переменные $x_1, x_2, \dots, x_7$ принимают только целые значения, нельзя гарантировать, что в результате распила получится, например, ровно 150 брусьев длиной 0,2 м. Можно потребовать только, чтобы их было не меньше 150 штук. Но если их будет, например, 152 штуки, получится еще 0,4 дополнительных единиц отходов. Обозначим через y_1, y_2, y_3 избыточные количества брусьев длиной 0,2; 0,3; 0,5 м. Они привнесут в целевую функцию дополнительно $0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,5y_3$ единиц отходов. Окончательно целевая функция выглядит так:

$$Z = x_2 + x_4 + x_6 + 0,2y_1 + 0,3y_2 + 0,5y_3 \rightarrow \min .$$

Система ограничений примет вид:

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 - y_1 = 150;$$

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 - y_2 = 300;$$

$$x_4 + x_5 + 2x_7 - y_3 = 300;$$

$$x_j \geq 0, x_j \in N, j = 1, 2, \dots, 7; y_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Пример 3. Задача о смеси.

Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката; b_1 тыс. л алкилата; b_2 тыс. л крекинг-бензина; b_3 тыс. л бензина прямой перегонки и b_4 тыс. л изопентана.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях получают 3 сорта бензина: бензин $A - 2:3:5:2$, бензин $B - 3:1:2:1$ и бензин $C - 3:2:1:3$.

Стоимости одной тысячи литров указанных сортов бензина равны c_1, c_2, c_3 единиц соответственно. Определить план смешивания компонентов из условия получения максимальной прибыли.

Описание неизвестных. В данном случае неизвестно, сколько тысяч литров каждого сорта бензина нужно получить. Следовательно, всего 3 неизвестных – x_1, x_2, x_3 , где x_j – количество бензина j -го сорта ($j = 1, 2, 3$), получаемого из данных полуфабрикатов.

Описание целевой функции. Требуется максимизировать суммарную прибыль. Прибыль от реализации x_1 тыс. л бензина сорта A составляет $x_1 c_1$ единиц, от реализации x_2 тыс. л бензина сорта $B - x_2 c_2$ единиц, от реализации x_3 тыс. л бензина сорта $C - x_3 c_3$ единиц. Требуется найти максимум целевой функции

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \max.$$

Описание системы ограничений. В системе ограничений должны быть записаны условия, запрещающие превышать запасы полуфабрикатов. Алкилата нельзя израсходовать более b_1 тыс. л, крекинг-бензина нельзя израсходовать более b_2 тыс. л, бензина прямой перегонки – более b_3 тыс. л, изопентана – более b_4 тыс. л.

Из условия задачи следует, что одна единица бензина сорта A состоит из $2/12$ единиц алкилата, $3/12$ единиц крекинг-бензина, $5/12$ единиц бензина прямой перегонки и $2/12$ единиц изопентана. Значит, для производства x_1 тыс. л бензина сорта A требуется $2/12 x_1$ тыс. л алкилата, $3/12 x_1$ тыс. л крекинг-бензина, $5/12 x_1$ тыс. л бензина прямой перегонки и $2/12 x_1$ тыс. л изопентана.

Подобным образом для производства x_2 тыс. л бензина сорта B требуется $3/7 x_2$ тыс. л алкилата, $1/7 x_2$ тыс. л крекинг-бензина, $2/7 x_2$ тыс. л бензина прямой перегонки и $1/7 x_2$ тыс. л изопентана. Чтобы получить x_3 тыс. л бензина сорта C , нужно затратить $3/9 x_3, 2/9 x_3, 1/9 x_3, 3/9 x_3$ тыс. л соответствующих полуфабрикатов. Ограничения по запасам алкилата, крекинг-бензина, бензина прямой перегонки, изопентана таковы:

$$2/12x_1 + 3/7x_2 + 3/9x_3 \leq b_1;$$

$$3/12x_1 + 1/7x_2 + 2/9x_3 \leq b_2;$$

$$5/12x_1 + 2/7x_2 + 1/9x_3 \leq b_3;$$

$$2/12x_1 + 1/7x_2 + 3/9x_3 \leq b_4.$$

Кроме того, нужно указать условие неотрицательности переменных:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Пример 4. Задача планирования производства.

Для производства трех различных видов деталей используют токарные, фрезерные и строгальные станки. Обработку каждой детали можно вести тремя различными технологическими способами. В табл. 1.2 указаны ресурсы (ч) каждой группы станков и время (ч), затрачиваемое на обработку детали по соответствующему технологическому способу. Прибыль от продажи деталей не зависит от способа производства и составляет 16, 18, 30 единиц за одну деталь первого, второго и третьего вида соответственно. Спланировать производство деталей, обеспечивающее максимум прибыли.

Описание неизвестных. Нужно определить, сколько деталей необходимо изготовить по каждому технологическому способу. Для описания неизвестных мало одного индекса. Нужно указать, во-первых, номер детали, и, во-вторых, номер технологического способа, по которому деталь изготавливается. Обозначим через x_{ij} количество деталей i -го вида, изготовленных по j -му технологическому способу, $i, j = 1, 2, 3$. Заметим, что $x_{13} = 0$, ведь по условию задачи третий способ не применяется для изготовления деталей первого вида. Поэтому имеем всего 8 переменных: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$.

Таблица 1.2

Тип станка	Детали								Ресурсы времен и, ч
	1		2			3			
	Технологические способы								
	1	2	1	2	3	1	2	3	
Токарный	0,4	0,9	0,5	0,3	–	0,7	–	0,9	370
Фрезерный	0,5	–	0,6	0,2	0,5	0,3	0,4	–	660
Строгальный	0,3	0,5	0,4	0,5	0,3	–	1,0	0,5	700

Описание целевой функции. Требуется обеспечить максимум суммарной прибыли.

Целевая функция

$$Z = 16(x_{11} + x_{12}) + 18(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 30(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \rightarrow \max.$$

Описание системы ограничений. Необходимо вычислить время, затраченное на обработку на каждом из типов станков всех видов деталей и потребовать, чтобы это время не превысило имеющихся ресурсов. Например, на производство x_{11} деталей первого вида по первому технологическому способу требуется $0,4x_{11}$ часов времени работы токарного станка; на производство x_{12} деталей первого вида по второму технологическому способу требуется $0,9x_{12}$ часов времени работы токарного станка. Всего же токарные станки должны проработать $0,4x_{11} + 0,9x_{12} + 0,5x_{21} + 0,3x_{22} + 0,7x_{31} + 0,9x_{32}$ часов. Ограничение по ресурсам времени токарных станков таково:

$$0,4x_{11} + 0,9x_{12} + 0,5x_{21} + 0,3x_{22} + 0,7x_{31} + 0,9x_{32} \leq 370.$$

Аналогично строятся ограничения по ресурсам времени фрезерных и строгальных станков.

$$0,5x_{11} + 0,6x_{21} + 0,2x_{22} + 0,5x_{23} + 0,3x_{31} + 0,4x_{32} \leq 660;$$

$$0,3x_{11} + 0,5x_{12} + 0,4x_{21} + 0,5x_{22} + 0,3x_{23} + x_{32} + 0,5x_{33} \leq 700.$$

И здесь все переменные не могут быть меньше нуля: $x_{11} - x_{33} \geq 0$. Кроме того, нужно ввести требование целочисленности переменных.

Пример 5. Транспортная задача.

Имеется m поставщиков и n потребителей некоторого товара. Запасы i -го поставщика составляют a_i единиц товара, $i = 1, 2, \dots, m$. Потребности j -го потребителя равны b_j единиц товара, $j = 1, 2, \dots, n$. Стоимость перевозки единицы товара от i -го поставщика j -му потребителю равна c_{ij} единиц. Требуется так закрепить поставщиков за потребителями, чтобы минимизировать суммарные затраты на перевозку товара.

Описание неизвестных. Здесь неизвестно, сколько единиц товара должен каждый поставщик передать каждому потребителю. Обозначим через x_{ij} количество единиц товара, поставляемых i -м поставщиком j -му потребителю, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Всего неизвестных $m \times n$.

Описание целевой функции. Определим суммарные затраты на перевозку товара. Например, затраты на перевозку x_{11} единиц товара от первого поставщика первому потребителю равны произведению $c_{11}x_{11}$. В общем случае затраты на перевозку x_{ij} единиц товара от i -го поставщика j -му потребителю равны произведению $c_{ij}x_{ij}$. Суммарные затраты равны

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min.$$

Описание системы ограничений. Будем считать, что сумма всех запасов не меньше суммы всех потребностей: $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$.

Тогда ограничения сводятся к требованию удовлетворить потребности каждого потребителя и к условию невозможности вывезти от каждого поставщика больше, чем есть у него в запасе.

Первый поставщик вывозит всем потребителям $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}$ единиц товара.

Таким образом, $\sum_{j=1}^n x_{1j} \leq a_1$.

Так как поставщиков всего m , то число ограничений по запасам равно m . Для i -го

поставщика имеем: $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Опишем ограничения по потребностям. Первый потребитель получает от всех поставщиков $x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1}$ единиц товара. Тогда должно быть

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = \sum_{i=1}^m x_{i1} = b_1$. Число ограничений по потребностям равно n ,

так как всего n потребителей. Для j -го потребителя имеем: $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Кроме того, величины x_{ij} не могут быть отрицательными, $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 6. Минимизация дисбаланса на линии сборки.

Фирма производит изделие, состоящее из трех узлов. Эти узлы изготавливают на двух заводах. Производительность заводов по выпуску каждого из трех видов узлов не одинакова. В табл. 1.3 указаны производительности заводов по выпуску каждого из узлов и суммарное время, которое каждый из заводов может выделить в течение недели на производство этих узлов.

Таблица 1.3

Завод	Максимальный недельный фонд времени, ч	Производительность, узел/ч		
		Узел 1	Узел 2	Узел 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Требуется определить еженедельные затраты времени (в часах) на производство каждого из трех видов узлов на каждом заводе, обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

Описание неизвестных. Обозначим через x_{ij} недельный фонд времени (ч), выделяемый на i -м заводе для производства j -го узла, $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$. Всего в задаче 6 переменных.

Описание целевой функции. Определим, сколько узлов каждого вида поступит на линию сборки в течение недели.

Первый завод за неделю изготовит $8x_{11}$ узлов первого вида, $5x_{12}$ узлов второго и $10x_{13}$ узлов третьего вида. Для второго завода эти числа равны соответственно $6x_{21}$, $12x_{22}$, $4x_{23}$. Тогда на линию сборки поступит $8x_{11} + 6x_{21}$ узлов первого вида, $5x_{12} + 12x_{22}$ узлов второго вида, $10x_{13} + 4x_{23}$ узлов третьего вида. Число готовых изделий равно минимальному из этих трех выражений. Это число требуется максимизировать.

$$Z = \min (8x_{11} + 6x_{21}; 5x_{12} + 12x_{22}; 10x_{13} + 4x_{23}) \rightarrow \max .$$

Описание системы ограничений. Время, затраченное каждым из заводов на производство всех трех узлов, не должно превышать суммарного недельного фонда времени. Поэтому

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 \quad (\text{для первого завода});$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80 \quad (\text{для второго завода}).$$

Кроме того, $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$.

Построенная модель не линейна, так как не линейна целевая функция Z . Целевую функцию можно сделать линейной, если положить

$$y = \min (8x_{11} + 6x_{21}; 5x_{12} + 12x_{22}; 10x_{13} + 4x_{23}). \quad \text{Тогда}$$

$$8x_{11} + 6x_{21} \geq y; \quad 5x_{12} + 12x_{22} \geq y; \quad 10x_{13} + 4x_{23} \geq y; \quad y \geq 0.$$

Окончательно математическую модель можно записать так:

$$y \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$8x_{11} + 6x_{21} - y \geq 0; \quad 5x_{12} + 12x_{22} - y \geq 0; \quad 10x_{13} + 4x_{23} - y \geq 0;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100; \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80;$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3; y \geq 0.$$

1.3. Задачи

Требуется составить математическую модель описываемой ситуации и ответить на дополнительные вопросы, если они есть.

1. Из пункта A в пункт B ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. В таблице указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых комплектуются поезда, и количество пассажирских мест в каждом из вагонов.

Поезда	Вагоны				
	Багажн.	Почт.	Жест. плац.	Куп.	СВ
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	0	8	4	1
Число	0	0	54	36	18

пассажиров					
Парк вагонов	12	8	81	70	—

Нужно максимизировать число ежедневно перевозимых пассажиров. Как изменится модель, если пропускная способность дороги такова, что в день по ней могут пройти не более 6 пассажирских поездов?

2. Фирма производит из одного вида сырья два продукта: A и B , продаваемых соответственно по 0,08 и 0,15 ед. за упаковку. Рынок сбыта для каждого из продуктов практически не ограничен. Продукт A обрабатывают на машине 1, продукт B – на машине 2. Затем оба продукта упаковывают на фабрике. Один килограмм сырья стоит 0,06 ед. Машина 1 обрабатывает 5000 кг сырья за один час с потерями 10 %. Машина 2 обрабатывает 4000 кг сырья за один час с потерями 20 %. Машина 1 доступна 6 ч в день; ее использование стоит 228 ед. в час. Машина 2 доступна 5 ч в день; ее использование обходится 186 ед. в час.

Фабрика может работать 10 часов в день. Один час работы фабрики обходится в 360 ед. За один час можно изготовить 12000 упаковок продукта A или 8000 упаковок продукта B . Упаковка продукта A весит 0,25 кг, упаковка продукта B – 0,33 кг. Сколько сырья для производства продуктов A и B нужно закупать ежедневно, чтобы максимизировать прибыль?

3. Авиакомпания должна перевезти 5000 пассажиров самолетами трех типов. Сколько самолетов каждого типа надо использовать, если для формирования экипажей имеется не более 440 человек, а издержки должны быть минимальными?

Тип самолета	Экипаж, чел.	Число пассажиров	Стоимость эксплуатации, ед.
1	3	38	7620
2	7	80	11000
3	4	46	8500

4. Определить оптимальную производственную программу.

Автомобильный завод выпускает машины типов A , B , C , D . Производственные мощности цехов и участков приведены в таблице. Определить оптимальную производственную программу.

Наименования цехов и участков	Тип машины			
	A	B	C	D
Подготовка производства	125	110	120	115
Кузовной	80	320	200	160

Цех шасси	110	110	100	170
Сборочный	160	80	120	100
Участок испытаний	280	70	140	210
Прибыль от выпуска одной машины, ед.	3100	2300	1800	2500

5. Требуется составить диету, содержащую, по крайней мере, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего составить диету из 5 имеющихся продуктов: хлеба, сои, сушеной рыбы, фруктов, молока? В таблице указаны цены продуктов за 1 кг (или л) в денежных единицах и содержание в продуктах компонентов диеты в условных единицах.

Питательные вещества	Продукты				
	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	24	75	64	36	10

6. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7, 4 денежные ед. в расчете на 1 денежную ед., затраченную на рекламу.

Фирма не может выделить на рекламу более 500 000 денежных единиц. Кроме того, фирма считает, что следует расходовать не более 40 % рекламного бюджета на телевидение и не более 20 % бюджета на афиши, а на радио планируется расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется расходовать на телевидение. Как целесообразнее распределить рекламный бюджет?

7. Требуется рационально организовать работу городского автобусного парка. Собраны данные о потребности в автобусах на одной из линий. Оказалось, что в пределах каждого из следующих друг за другом четырехчасовых интервалов требуемое количество автобусов можно считать величиной постоянной. Эти значения указаны в таблице. Продолжительность непрерывной работы автобуса не должна превышать 8 ч в сутки.

Интервал времени, ч	24 – 04	04 – 08	08 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24
---------------------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Требуется автобусов	4	8	10	7	12	4
---------------------	---	---	----	---	----	---

Минимизировать количество автобусов, выходящих на линию в течение суток.

8. Бройлерное хозяйство фабрики насчитывает 20 000 цыплят, которых выращивают до восьминедельного возраста и затем продают. Недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, но можно положить, что в среднем одному цыпленку требуется 500 г корма в сутки.

Кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности, для чего составляются смеси из различных ингредиентов. Для простоты ограничимся тремя составляющими: известняком, зерном и соевыми бобами. Учитываются три вида питательных веществ: кальций, белок, клетчатка. Данные о содержании питательных веществ в ингредиентах приведены в таблице.

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/кг ингредиента)			
	Кальций	Белок	Клетчатка	Стоимость, ед./кг
Известняк	0,38	0	0	0,08
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,30
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,80

Получить кормовую смесь минимальной стоимости, удовлетворяющую перечисленным требованиям.

9. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объем производства составил бы 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов находится в диапазоне от 150 до 200 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 ед., а шляпы фасона 2 – 5 ед. Фирма хочет максимизировать свою прибыль.

10. Фирма выпускает изделия трех моделей: 1, 2 и 3. Для их изготовления используются два вида ресурсов: *A* и *B*, запасы которых составляют 4000 и 6000 единиц. Расходы ресурсов на одно изделие каждой модели приведены в таблице. Трудоемкость изготовления изделия модели 1 вдвое больше, чем изделия модели 2, и втрое больше, чем изделия модели 3. Если бы фирма выпускала только изделия модели 1, то ежедневный выпуск составил бы 1500 штук.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие		
	1	2	3

<i>A</i>	2	3	5
<i>B</i>	4	2	7

Анализ рынка сбыта показал, что ежедневно можно продать не менее чем 200 изделий модели 1, 200 изделий модели 2, 150 изделий модели 3. Кроме того, соотношение выпуска изделий моделей 1, 2 и 3 должно быть 3:2:5. Прибыль от реализации одного изделия равна: для модели 1 – 40 ед., для модели 2 – 20 ед., для модели 3 – 30 ед. Требуется максимизировать прибыль.

11. Для изготовления сплава из свинца, цинка и олова используют сырье, представляющее собой пять различных сплавов этих металлов. Содержание (%) свинца и цинка в каждом из сплавов и стоимость 1 кг сплава (денежные единицы) приведены в таблице.

Компоненты	Состав сплава (%)				
	1	2	3	4	5
Свинец	7	9	40	52	30
Цинк	11	23	42	24	15
Стоимость	14	12	11	9	11,5

Сколько сплава каждого вида нужно взять, чтобы изготовить с минимальной себестоимостью сплав, содержащий не более 40 % олова и не менее 20 % свинца? Как изменится модель, если ограничения станут такими: олова от 40 до 60 %; цинка от 20 до 30 %?

12. Некоторому производству требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с долей зольных примесей не более 3,25 %. Три сорта угля (*A*, *B*, *C*) доступны по следующим ценам за 1 т:

Сорт угля	Содержание фосфора, %	Содержание золы, %	Цена, единицы
<i>A</i>	0,06	2,0	30
<i>B</i>	0,04	4,0	30
<i>C</i>	0,02	3,0	45

Как следует смешать эти три сорта угля, чтобы удовлетворить заданным требованиям с минимальными затратами?

13. Средства для очистки пола оценивают по трем показателям: очищающие свойства; дезинфицирующие свойства; раздражающее воздействие на кожу. Каждый из этих показателей оценивается по линейной шкале от 0 до 100 единиц.

В конечном продукте должно быть не менее 60 единиц очищающих свойств и не менее 60 единиц дезинфицирующих свойств. Раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Этот продукт нужно

получить, смешав три основных очистителя, характеристики которых приведены в таблице.

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие
<i>A</i>	90	30	70
<i>B</i>	65	85	50
<i>C</i>	45	70	10

Требуется получить оптимальную смесь.

14. В угольном бассейне добывают уголь трех сортов в соотношении 1:3:1. Этот уголь доставляют 6 энергетическим установкам. Известны теплотворные способности каждого из сортов угля (ккал/кг): 2800, 3000, 3500 и потребности установок (млрд. ккал): 7, 14, 11, 25, 17, 9. Затраты на добычу 1 т угля каждого сорта (ед.) таковы: 8, 10, 15. Найти нужный объем добычи и распределение разных сортов угля между энергетическими установками из условия минимизации суммарных затрат.

15. При производстве изделий *A*, *B*, *C* используют два вида оборудования. На первом для изготовления одного изделия *A* требуется 1,15 ч, для *B* – 1,5 ч, для *C* – 2,1 ч. Для второго вида оборудования затраты времени составляют соответственно 1,3; 1,6; 1,5 ч. На производство изделий отведено 3000 часов работы первого оборудования и 2400 часов – второго. Прибыль от реализации одного изделия *A* равна 80 ед., одного изделия *B* – 60 ед., одного изделия *C* – 70 ед. За каждый час простоя оборудования взимается штраф 10 ед. Максимизировать прибыль.

16. Нефтяная компания получает нефть из нескольких источников (*W*, *X*, *Y*, *Z*), очищает ее, производя различные виды (*A*, *B*, *C*) смазочных масел. Имеются также ограничения на состав масел.

Масло	Состав, %				Возможный спрос, баррели
	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	
<i>A</i>	≥ 10	–	–	≤ 25	2140
<i>B</i>	≥ 15	–	–	–	2400
<i>C</i>	–	≥ 20	≤ 50	–	2900

Цены (в условных единицах) одного барреля сырья и смазочных масел приведены ниже.

Сырье				Масло		
<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
31,5	30,2	25,3	28,0	37,8	36,5	35,3

Предполагая, что сырая нефть доступна в неограниченном количестве, максимизировать прибыль компании.

17. Компания импортирует красные вина трех марок, которые смешивают для получения столовых вин трех марок. Необходимые сведения приведены в таблицах.

Марка вина	Цена одной бутылки, ед.	Годовой импорт бутылок
Французское бургундское	1,08	100 000
Французское бордо	0,96	130 000
Испанское красное	0,50	150 000

Марка столового вина	Содержание красного вина, %		Максимальный сбыт за год, бутылок	Цена бутылки, ед.
	Не менее	Не более		
Божеле	30 бург.	50 исп.	200 000	1,96
Нюи-Сент-Жорж	30 бург.	30 исп.	Неограничен	2,46
Сент-Эмильон	60 бордо	30 исп.	180 000	2,08

Максимизировать прибыль от продажи столовых вин.

18. Под посев 5 культур отведено 3 различных участка земли площадью 35, 40, 60 га. В таблице приведены данные о среднем урожае с 1 га каждой культуры на каждом участке, прибыли от продажи одного центнера культуры и минимально необходимом количестве каждой культуры.

Как обеспечить максимальную выручку?

Культура	Урожайность на участках, ц/га			Потребности в культуре, ц	Прибыль, ед.
	1	2	3		
1	43	41	50	1500	15
2	39	43	40	1300	19
3	60	70	67	2000	12
4	55	53	50	1600	14
5	35	34	40	1100	22

19. Обработка деталей трех видов производится на трех различных станках. В таблице указаны нормы времени (ч) на обработку станком соответствующей детали, прибыль от продажи одной детали (ед.), стоимость одного часа работы каждого станка (ед.) и предельное время работы каждого станка (ч).

Станок	Нормы времени обработки деталей			Стоимость 1 ч работы станка, ед.	Время работы станка, ч
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		
1	0,2	0,1	0,05	30	40
2	0,6	0,2	0,2	10	60
3	0,2	0,4	0,4	20	30
Прибыль (ед.)	10	16	12	—	—

Далее описаны 15 условий. В каждом случае нужно построить математическую модель, считая, что в условиях 1 – 10 подразумевается, что любая деталь может производиться на любом из станков, а в случаях 11 – 15 каждая деталь проходит последовательную обработку на каждом станке.

1. Получить максимум товарной продукции.
2. Максимизировать суммарную прибыль
3. Минимизировать суммарные затраты времени на обработку, если требуется изготовить 300 деталей *A*, 500 деталей *B*, 100 деталей *C*.
4. Изготовить максимум комплектов, состоящих из 3-х деталей *A*, 2-х деталей *B*, 1-й детали *C*.
5. Максимизировать суммарную прибыль, если задан ассортимент – 3:2:1.
6. Максимизировать суммарную прибыль, если требуется изготовить не менее 200 деталей *A*, 400 деталей *B*, 100 деталей *C*.
7. Добиться максимальной загрузки станков при заданном ассортименте – 3:2:1.
8. Максимизировать суммарное число изготовленных деталей при одинаковом времени работы всех станков.
9. Максимизировать прибыль, если каждый станок загрузить производством только одного вида деталей. Кроме того, нужно изготовить не менее 100 штук деталей каждого вида.
10. Максимизировать выпуск товарной продукции при дополнительных условиях п. 9.
11. Условия п.1. 12. Условия п.2. 13. Условия п.3. 14. Условия п.4. 15. Условия п.5.

20. Из пункта *A* в пункт *B* и обратно отправляются 4 поезда в соответствии со следующим расписанием: из *A* в *B*: в 9, 12, 16, 20 ч 30 мин. Из *B* в *A*: в 10, 15, 18, 22 ч.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно 5 ч. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки 2 рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, второй обратно, с ближайшим очередным рейсом. Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами *A* и *B*, обеспечивающее минимум суммарного времени простоя локомотивов.

21. Требуется доставить железную руду с трех месторождений четырем заводам. Стоимость перевозки (ед.) одной тонны руды от каждого месторождения каждому заводу задана таблицей.

Месторождение	Завод			
	1	2	3	4

I	3	4	3	5
II	6	7	6	3
III	8	3	7	9

Запасы добытой руды на месторождениях за некоторый период времени составили 200, 200 и 250 т соответственно. Потребности заводов за тот же период времени были такими: 100, 200, 100 и 300 т. Как организовать поставки руды заводам, чтобы минимизировать стоимость перевозок и полностью обеспечить рудой четвертый завод?

22. Четыре авиалинии (A, B, C, D) обслуживают три типа самолетов. Количество пассажиров (тыс. чел.), которых нужно перевезти по каждой из авиалиний за некоторый промежуток времени, таково: по линии $A - 20$, $B - 10$, $C - 15$, $D - 30$. Число самолетов типа 1 равно 15, типа 2 – 10, типа 3 – 25. В таблице указано, сколько пассажиров (чел.) может перевезти самолет каждого типа по данной авиалинии за данный период времени (числитель) и заданы эксплуатационные расходы (ед.) на один самолет (знаменатель). Распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы минимизировать суммарные расходы.

Тип самолета	Авиалинии			
	A	B	C	D
1	500/5	1200/7	1000/20	2200/12
2	750/9	1800/4	1500/8	3300/10
3	1000/6	2450/8	2000/4	4350/5

23. Строительный песок добывается в трех карьерах и доставляется на четыре строительных площадки. Производительности карьеров (т) таковы: карьер $A - 96$, карьер $B - 15$, карьер $C - 40$. Потребности (т) строительных площадок в песке за то же время равны 40, 35, 30 и 45 т соответственно. Затраты на добычу песка и транспортные расходы (ед./т) приведены в таблице.

Карьер	Строительная площадка				Затраты на добычу песка
	1	2	3	4	
A	6	3	4	7	4
B	3	7	8	5	6
C	4	8	9	6	2

Найти оптимальное закрепление строительных площадок за карьерами.

24. Минимально необходимое количество автобусов в i -й час суток равно b_i , $i = 1, 2, \dots, 24$. Каждый автобус используется на линии непрерывно в течение 6 часов. Превышение числа автобусов в i -й час величины b_i приводит к дополнительным издержкам c_i на один машино-час. Нужно минимизировать суммарные дополнительные издержки.

25. Производитель безалкогольных напитков располагает двумя различными машинами – A и B . Машина A спроектирована для пол-литровых бутылок, машина B – для литровых. Но каждая из них может использоваться для обоих типов бутылок с некоторой потерей эффективности в соответствии со следующими данными.

Машина	Производительность, бут./мин	
	Пол-литровые	Литровые
A	50	20
B	40	30

Каждая из машин работает ежедневно по 6 часов при пятидневной рабочей неделе. Прибыль от продажи пол-литровой бутылки равна 4 денежным единицам, литровой – 10. Недельная продукция не должна превосходить 50000 литров, причем рынок принимает не более 44000 пол-литровых бутылок и 30000 литровых. Максимизировать прибыль.

26. Группа, исследующая рынок, собирает сведения в пяти городах. Группа намерена провести полдня в каждом городе. Хозяйства, предназначенные для опроса, выбраны заранее. Основываясь на уже накопленном опыте, группа оценила вероятности успешных контактов в каждом городе. Эти вероятности представлены в таблице.

Время	Город				
	A	B	C	D	E
Среда до полудня	0,67	0,62	0,40	0,52	0,63
Среда после полудня	0,9	0,70	0,87	0,65	0,63
Четверг до полудня	0,57	0,25	0,60	0,60	0,53
Четверг после полудня	0,40	0,52	0,43	0,45	0,50
Среда до полудня	0,63	0,60	0,36	0,40	0,67
Число назначенных опросов	30	40	40	30	30

Требуется максимизировать ожидаемое число успешных опросов.

Чтобы определить, какую именно полуплоскость определяет данное неравенство, достаточно взять произвольную точку плоскости (x_1, x_2) (например, начало координат) и подставить в неравенство числа x_1, x_2 .

Если оно удовлетворится, то полуплоскость, в которой лежит данная точка, – искомая. В противном случае нужная полуплоскость лежит по другую сторону прямой $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Допустимую область задачи (2.1) составляют точки пересечения полуплоскостей, определяемых каждым из ограничений.

Пример 1. Построить допустимую область системы неравенств

$$-x_1 + x_2 \leq 1;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$2x_1 - 6x_2 \leq 6.$$

Допустимая область ($\triangle ABC$) показана на рис. 2.2. Штриховка указывает на искомую полуплоскость.

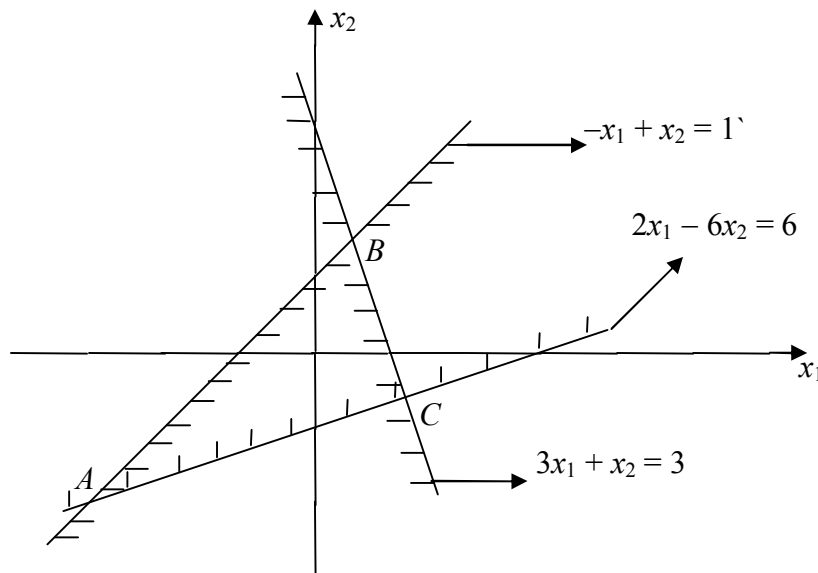


Рис. 2.2

Пример 2. Найти допустимую область системы неравенств

$$-x_1 + x_2 \leq 1;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Допустимая область – незамкнутый многоугольник AOB (рис. 2.3).

Пример 3. Найти допустимую область системы неравенств

$$0,75x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_2 \leq 1.$$

Допустимая область пуста (рис. 2.4), система неравенств несовместна.

Теперь научимся находить те точки допустимой области, в которых данная целевая функция достигает максимума или минимума.

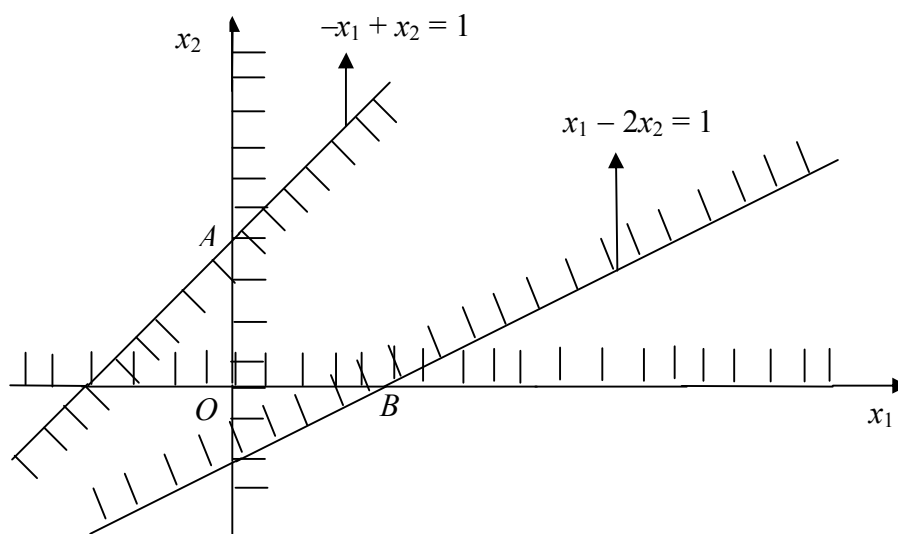


Рис. 2.3

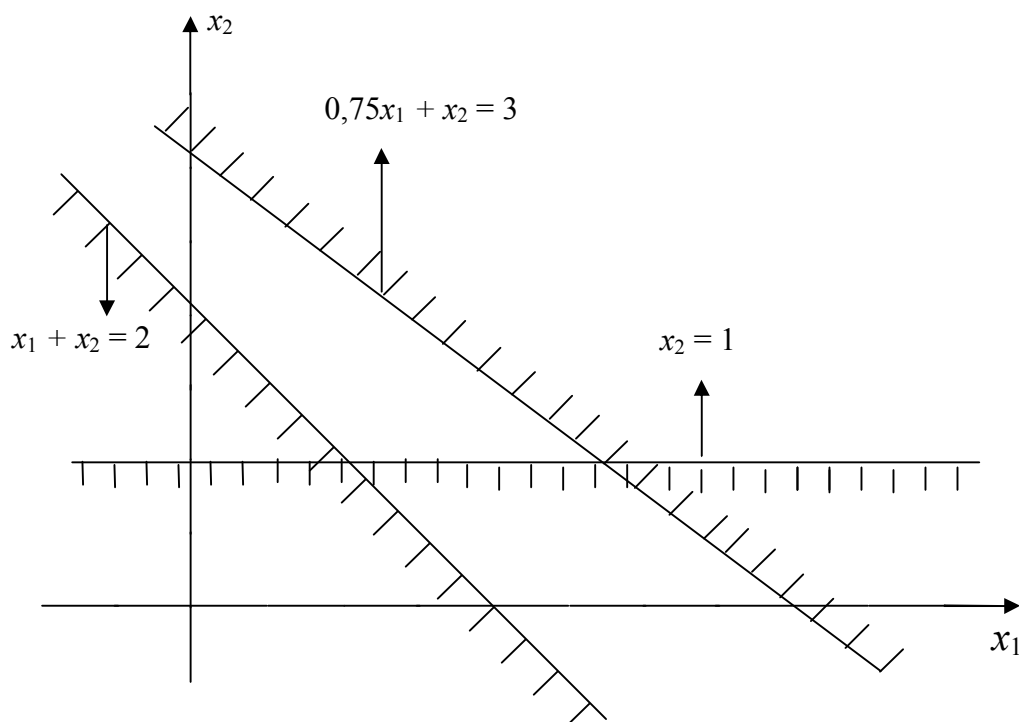


Рис. 2.4

Целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает одно и то же значение α во всех точках прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$. Такая прямая называется **линией уровня целевой функции**.

Когда α меняется, линия уровня перемещается в плоскости параллельно себе самой. Чтобы найти, например, максимум целевой функции, нужно найти такие точки допустимой области, которые принадлежат линии уровня с наибольшим значением параметра α

Значения целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2$ неограниченно возрастают, если перемещать прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ в направлении ее нормали – вектора-градиента $\bar{c} = (c_1, c_2)$. Значения целевой функции неограниченно убывают, если перемещать прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$ в направлении вектора $-\bar{c}$. То положение прямой, при котором ее дальнейшее перемещение дает пустое пересечение с допустимой областью, и будет искомым. Множество оптимальных точек состоит из точек пересечения последней линии уровня с допустимой областью. На рис. 2.5 показан случай, когда максимум целевой функции достигается в точке D , а минимум – во всех точках отрезка AB . При этом $Z_{\min} = \alpha_1$; $Z_{\max} = \alpha_3$.

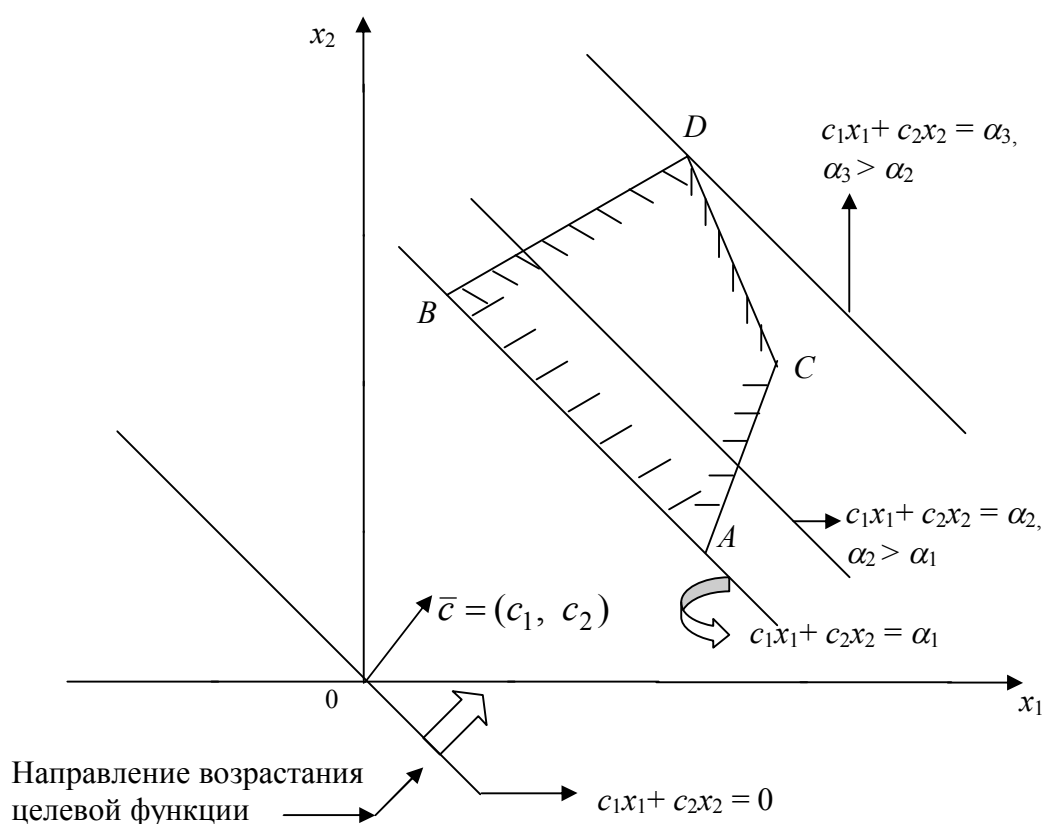


Рис. 2.5

Пример 4. Решить графически следующую ЗЛП:

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min) ;$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2 ;$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1 ;$$

$$x_1 + x_2 \geq 2 ;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Допустимая область показана на рис. 2.6. Эта область не ограничена. Вектор $\bar{c} = (2, 1)$ указывает направление возрастания целевой функции.

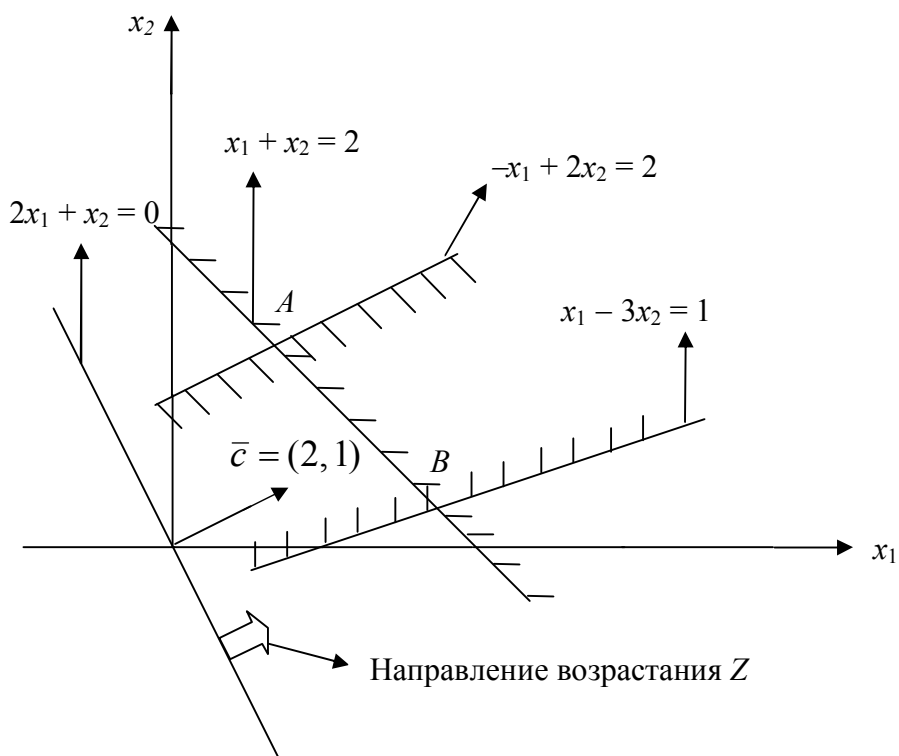


Рис. 2.6

Из рис. 2.6 следует, что линию уровня можно неограниченно перемещать в направлении вектора $\bar{c} = (2, 1)$. При любом значении α прямая $2x_1 + x_2 = \alpha$ пересекает допустимую область. Целевая функция не ограничена сверху в допустимой области, задача максимизации целевой функции не имеет решения. Обозначим эту ситуацию так: $Z_{\max} = +\infty$.

Минимум целевой функции достигается в точке A . Найдём её координаты. Точка A лежит на пересечении прямых $x_1 + x_2 = 2$ и $-x_1 + 2x_2 = 2$. Решая систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2,$$

находим: $x_1 = 2/3$; $x_2 = 4/3$; $Z_{\min} = 1 \times (2/3) + 2 \times (4/3) = 10/3$.

Пример 5. Решить ЗЛП:

$$Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \max (\min) ;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 + x_2 \geq -1$$

$$x_1 + x_2 \leq 1.$$

Допустимая область показана на рис. 2.7.

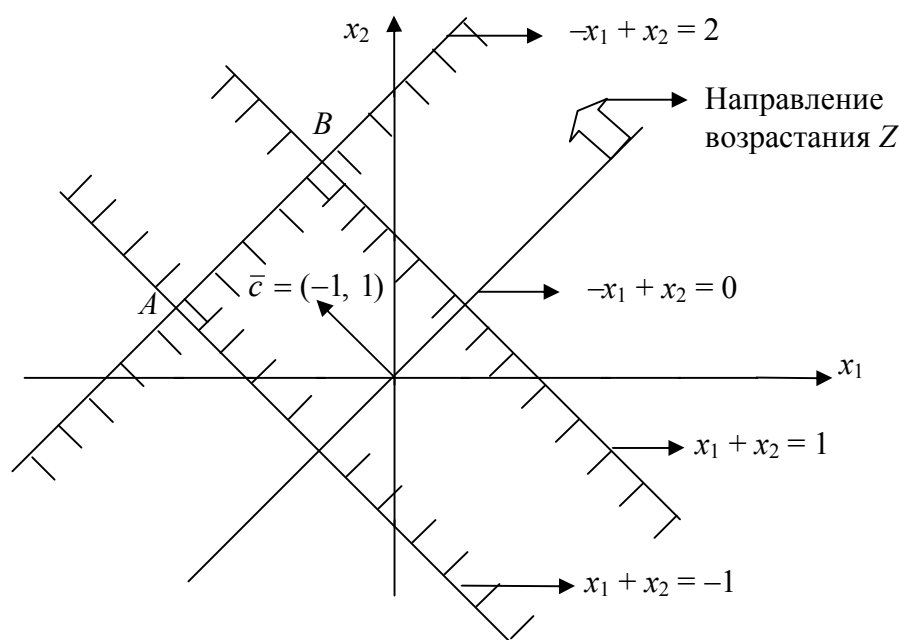


Рис. 2.7

В этом случае $Z_{\min} = -\infty$, целевая функция не ограничена снизу в допустимой области. Максимум целевой функции достигается во всех точках отрезка AB . Отрезок AB принадлежит линии уровня $-x_1 + x_2 = 2$, следовательно, $Z_{\max} = 2$.

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод:

1. Допустимая область — это всегда выпуклый многоугольник, даже если она не ограничена.
2. Оптимальное решение, если оно существует, — это либо вершина допустимой области, либо множество точек некоторого отрезка

допустимой области (но тогда среди них можно выделить две вершины – концы этого отрезка), либо некоторая прямая.

2.2. Понятие об анализе на чувствительность

Цель анализа на чувствительность – показать, как изменится оптимальное решение данной ЗЛП, если изменить коэффициенты целевой функции или правые части системы ограничений, или коэффициенты при переменных в левой части системы ограничений.

Для ответа на подобные вопросы не нужно заново решать ЗЛП. Оказывается, что, располагая оптимальным решением ЗЛП и некоторой дополнительной информацией, можно провести анализ на чувствительность, не возвращаясь к началу решения. Как это делается в общем случае, мы увидим позже. А сейчас рассмотрим пример.

Пример. Фирма производит два вида продукции – A и B . Объем сбыта продукции A составляет не менее 60 % от всего объема реализованной продукции. Кроме того, продукции A желательно выпускать не менее 15 и не более 35 единиц.

Для изготовления продукции A и B используют одно и то же сырье, суточный запас которого не превосходит 100 единиц. Расход сырья на единицу продукции A равен 2 единицам, а на единицу продукции B – 4 единицам. Цена единицы продукции A и B равна соответственно 20 и 40 денежным единицам. Нужно максимизировать ежедневную прибыль от продажи произведенной продукции.

Описание неизвестных. Неизвестно, сколько единиц каждого вида продукции следует ежедневно производить. Обозначим эти величины через x_1 и x_2 для продукции A и B соответственно.

Описание целевой функции. Ежедневная прибыль фирмы равна $Z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$.

Описание системы ограничений. По условиям производства продукции A :

$$x_1 \geq 0,6(x_1 + x_2); \quad x_1 \geq 15; \quad x_1 \leq 35.$$

$$\text{По запасам сырья: } 2x_1 + 4x_2 \leq 100.$$

$$\text{Кроме того, } x_1, x_2 \geq 0.$$

Графическое решение задачи представлено на рис. 2.8.

Так как линия уровня параллельна прямой $2x_1 + 4x_2 = 100$, $Z_{\max}$ достигается во всех точках отрезка AB и равен 1000. Координаты точки A : $x_1 = 150/7 = 21,43$; $x_2 = 100/7 = 14,29$. Координаты точки B : $x_1 = 35$; $x_2 = 7,5$.

Первая задача анализа на чувствительность. Требуется ответить на такие вопросы:

1. На сколько можно изменить (увеличить или уменьшить) правую часть некоторого ограничения, чтобы оптимальное значение целевой функции не изменилось?

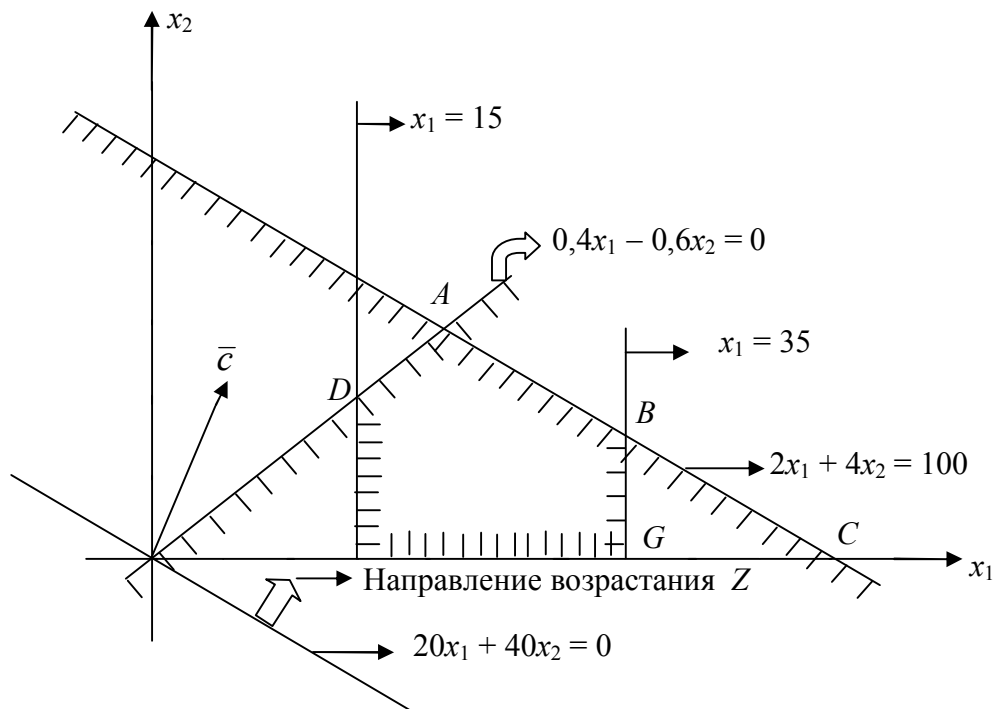


Рис. 2.8

2. На сколько нужно изменить правую часть некоторого ограничения, чтобы улучшить значение целевой функции?

Ответим на эти вопросы для нашего примера. Максимум целевой функции достигается во всех точках отрезка AB , лежащего на прямой $2x_1 + 4x_2 = 100$. Ограничение $2x_1 + 4x_2 = 100$ называют **связывающим**, а остальные ограничения — **несвязывающими**. Если бы максимум Z достигался в вершине, а не на отрезке, то связывающими оказались бы два ограничения, соответствующие прямым, на пересечении которых лежит эта вершина. Правая часть ограничения $2x_1 + 4x_2 = 100$ (число 100) называется **дефицитным ресурсом**, правые части несвязывающих ограничений называются **недефицитными ресурсами**. Эти определения пришли из экономики, когда требовалось дать содержательную трактовку решения ЗЛП, математическая модель которой описывала реальную экономическую проблему.

В оптимальной точке связывающие ограничения превращаются в равенства, а несвязывающие — в строгие неравенства. Это значит, что правую часть несвязывающего ограничения можно увеличить (если это ограничение $\geq$) или уменьшить (если это ограничение $\leq$) на некоторое число, но оптимальное решение задачи останется прежним

Если, например, увеличить правую часть ограничения $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$, сделать ее больше нуля, прямая AD переместится вниз. Но до тех пор, пока точка A пересечения прямой AD с прямой $2x_1 + 4x_2 = 100$ лежит выше точки B , $Z_{\max}$ по-прежнему достигается во всех точках отрезка AB и равен 1000. В частности, точка $B(35; 7,5)$ будет одним из оптимальных решений задачи. Последний раз это произойдет, когда точки A и B сольются. Подставляя в уравнение $0,4x_1 - 0,6x_2 = \alpha$ координаты точки B , получаем, что $\alpha = 0,4 \times 35 - 0,6 \times 7,5 = 9,5$.

Как только α превзойдет число 9,5, оптимальной станет точка пересечения отрезка BG и прямой $0,4x_1 - 0,6x_2 = \alpha$. В этом случае всегда нужно производить 35 единиц продукции A . Количество единиц продукции B определяется из уравнения $x_2 = (0,4 \times 35 - \alpha) / 0,6$. Значит, если $\alpha > 14$, система ограничений становится несовместной.

Отметим, что неравенство $0,4x_1 - 0,6x_2 \geq \alpha$ можно переписать в виде $x_1 \geq 0,6(x_1 + x_2) + \alpha$ и трактовать следующим образом: объем сбыта продукции A составляет не менее 60 % всего объема реализованной продукции плюс дополнительно α единиц.

Ответим на второй вопрос. Чтобы увеличить значение целевой функции, нужно увеличить запас дефицитного ресурса, т.е. увеличить правую часть ограничения $2x_1 + 4x_2 \geq 100$. Тогда прямая AB начнет перемещаться вверх (рис. 2.9).

При перемещении вверх прямой AB отрезок AB , в конце концов, стянется в точку $K(35; 70/3)$. Уравнение прямой AKB : $2x_1 + 4x_2 = 2 \times 35 + 4 \times 70/3 = 490/3$. В точке K , лежащей на пересечении прямых $x_1 = 35$ и $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$, становятся связывающими оба ограничения: $x_1 = 35$ и $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$. Допустимая область – четырехугольник $EDKG$, максимум целевой функции достигается в точке K и равен $Z_{\max} = 20 \times 35 + 40 \times 70/3 = 4900/3$. Если запас сырья превзойдет величину $490/3$, то ограничение по запасу сырья перестанет влиять на форму допустимой области (уже не будет связывающим) и, значит, на оптимальное решение. Объем запаса сырья не следует увеличивать сверх числа $490/3$, это не приведет к росту прибыли.

Вторая задача анализа на чувствительность. Требуется ответить на вопрос: правую часть какого из связывающих ограничений следует изменить, чтобы максимально улучшить значение целевой функции?

У нас всего одно связывающее ограничение. Мы показали, что целевую функцию можно увеличить на $1900/3$ единицы, если увеличить запасы сырья на $190/3$ единицы.

В общем случае нескольких связывающих ограничений вводится понятие **ценности дополнительной единицы дефицитного ресурса**. Это число определяется соотношением

$$y_i = \frac{\text{Максимальное изменение оптимального значения } Z}{\text{Максимально допустимое изменение правой части}},$$

где i – номер соответствующего ограничения. В нашем примере ценность единственного ресурса равна $y = \frac{4900/3}{490/3} = 10$. Другими словами, увеличение на единицу объема ресурса приведет к росту целевой функции на 10 единиц.

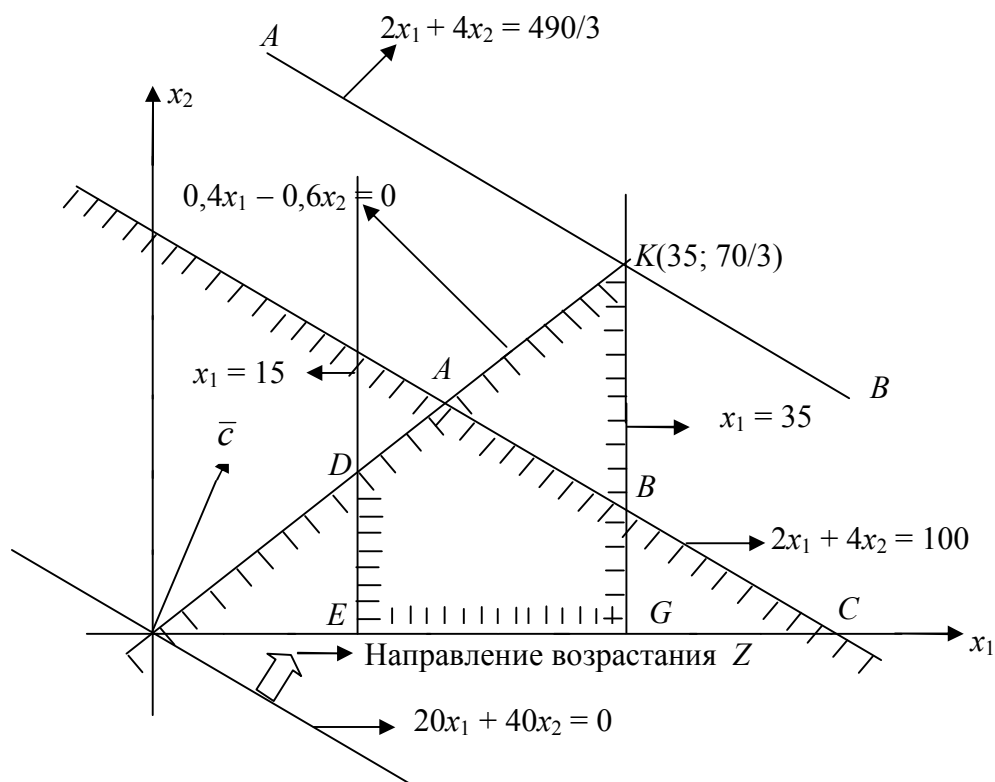


Рис. 2.9

Ценность недефицитных ресурсов равна 0, изменение объема недефицитных ресурсов либо не меняет оптимального значения целевой функции, либо ухудшает его. В первую очередь следует увеличивать объем самого ценного дефицитного ресурса.

Третья задача анализа на чувствительность. Требуется выяснить, в каких пределах можно менять коэффициенты целевой функции, чтобы оптимальное решение не изменилось. Если же коэффициенты целевой

функции меняются настолько сильно, что оптимальное решение меняется, нужно определить, каким оно станет.

Рассмотрим такую целевую функцию.

$Z = \lambda c_1 x_1 + c_2 x_2$, где c_1, c_2 – заданные числа, λ – параметр, который может принимать любое значение из интервала $(-\infty, +\infty)$. Выберем линию уровня целевой функции, на которой она равна 0, ее уравнение

$$\lambda c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0. \quad (2.2)$$

Эта прямая проходит через точку $(0, 0)$ – начало координат – при любых значениях c_1, c_2, λ . Условно «разрешим» параметру λ принимать также значения $\pm \infty$. Уравнение (2.2) перепишем в виде

$$x_2 = \frac{-\lambda c_1}{c_2} x_1. \quad (2.3)$$

Коэффициент $(-\lambda c_1)/c_2$ равен тангенсу угла наклона прямой (2.3) к оси x_1 . Изменение величины λ означает вращение прямой (2.3) относительно начала координат. Когда $\lambda = \pm \infty$, прямая (2.3) совпадает с осью x_2 ; когда $\lambda = 0$, прямая (2.3) совпадает с осью x_1 .

Таким образом, когда $-\infty < \lambda < \infty$, прямая $\lambda c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ совершает поворот на угол π из начального вертикального положения. Чтобы определить направление вращения, рассмотрим три положения вектора $\bar{c} = (\lambda c_1, c_2)$, перпендикулярного прямой $\lambda c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$.

Пусть $c_1 > 0, c_2 > 0$. Тогда, если $\lambda = -\infty$, вектор $\bar{c}$ направлен по оси x_1 в отрицательную сторону (справа налево). При $\lambda = 0$ вектор $\bar{c}$ направлен по оси x_2 вертикально вверх. При $\lambda = +\infty$ вектор $\bar{c}$ направлен по оси x_1 в положительную сторону (слева направо) (рис. 2.10). Вращение происходит по часовой стрелке. На рис. 2.10 показано также, как происходит вращение вектора $\bar{c}$ при других сочетаниях знаков коэффициентов c_1, c_2 .

В качестве самостоятельного упражнения предлагается построить подобную диаграмму для вектора $\bar{c} = (c_1, \lambda c_2)$, когда целевая функция такова: $Z = c_1 x_1 + \lambda c_2 x_2$, где c_1, c_2 – заданные числа, λ – параметр, $-\infty < \lambda < \infty$.

Обратимся к целевой функции $Z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$. Выясним, как влияет на оптимальное решение значение стоимости одной единицы продукции B . Перепишем целевую функцию в виде $Z = 20x_1 + \lambda x_2 \rightarrow \max$. Начнем со значения $\lambda = 0$, не рассматривая отрицательные значения стоимости, и будем увеличивать этот коэффициент (рис. 2.11).

Когда $\lambda = 0$ (единица продукции B не приносит прибыли), линия уровня $20x_1 = 0$ совпадает с осью x_2 . Вектор $\bar{c}$, указывающий направление возрастания целевой функции, имеет координаты $(20, 0)$. Он расположен горизонтально и указывает в сторону положительной полуоси x_1 . Максимум целевой функции достигается во всех точках отрезка BG . Самое естественное оптимальное решение – $x_1 = 35$; $x_2 = 0$. Ведь если продукция B не приносит прибыли, ее не нужно производить вовсе, а нужно производить только продукцию A . Так как по условию больше 35 единиц продукции A изготовить нельзя, то в любой оптимальной точке (точке отрезка BG) $x_1 = 35$, $Z_{\max} = 35 \times 20 + 0 = 700$.

Пусть $\lambda > 0$. Если λ возрастает, то линия уровня (вместе с вектором-градиентом) вращается против часовой стрелки.

Максимум целевой функции будет достигаться в вершине B , в которой $Z_{\max} = 20 \times 35 + 7,5\lambda = 700 + 7,5\lambda$. При некотором λ линия уровня станет параллельна прямой AB . Тогда максимум целевой функции будет достигаться во всех точках отрезка AB . Параллельность прямых означает пропорциональность коэффициентов при переменных в уравнениях этих прямых.

$$\bar{c} = (\lambda c_1, c_2)$$

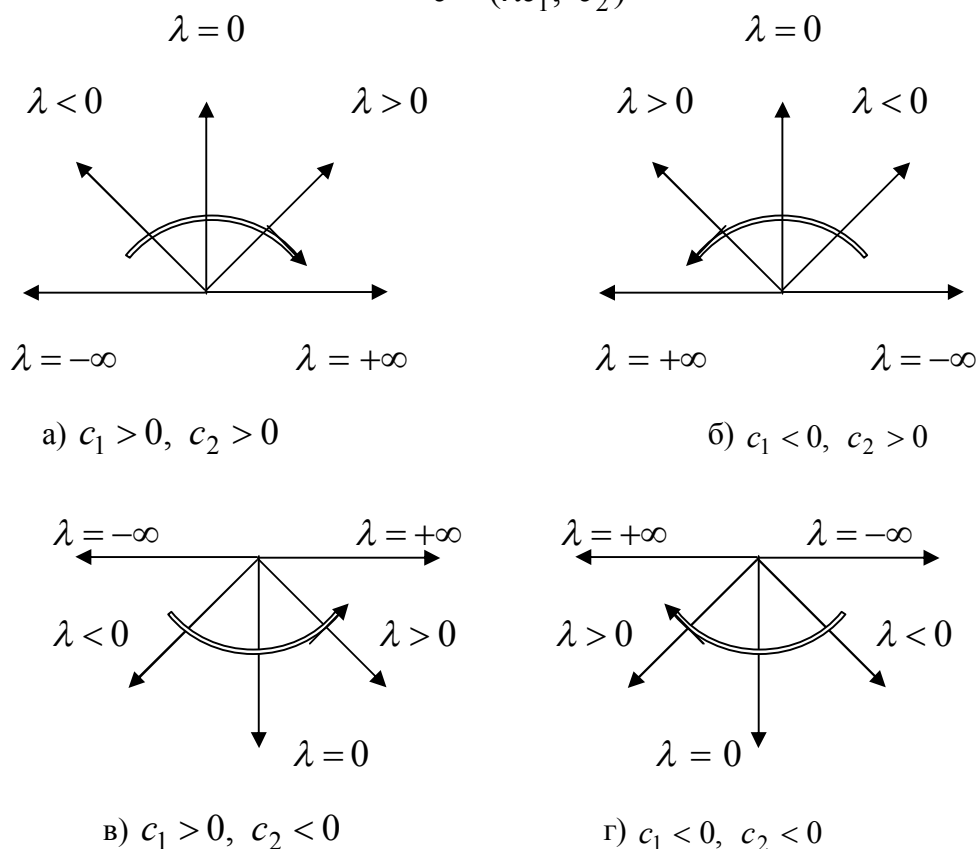


Рис. 2.10

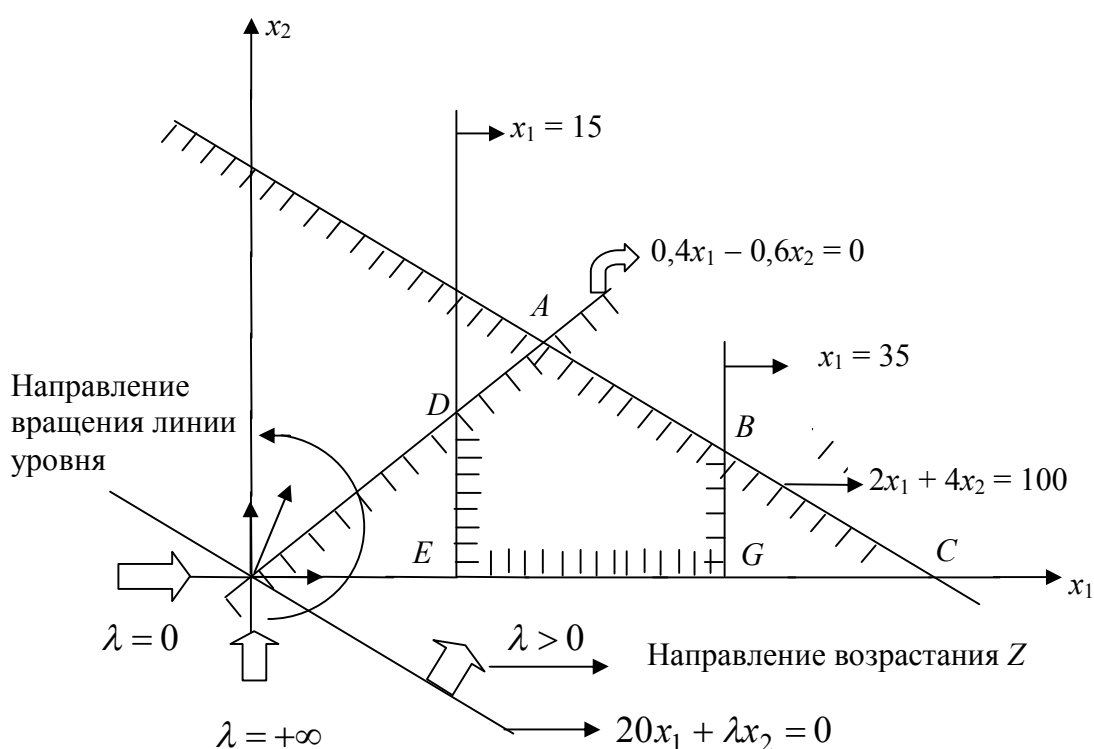


Рис. 2.11

Уравнение прямой AB $2x_1 + 4x_2 = 100$.

Уравнение линии уровня $20x_1 + \lambda x_2 = \text{const}$.

Отсюда $2/20 = 4/\lambda \Rightarrow \lambda = 40$. Итак, когда $\lambda = 40$, максимум Z достигается во всех точках отрезка AB и равен 1000.

Если $40 < \lambda < +\infty$, максимум Z достигается в вершине A . Определим ее координаты. Точка A лежит на пересечении прямых $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$ и $2x_1 + 4x_2 = 100$, откуда $x_1 = 150/7$, $x_2 = 100/7$, $Z_{\max} = 3000/7 + (100/7)\lambda$.

Наконец, если формально положить $\lambda = +\infty$, то можно назвать оптимальную вершину – это снова вершина A . Подведем итоги.

1. $\lambda = 0$. $Z_{\max}$ достигается во всех точках отрезка BG и равен 700.
2. $0 < \lambda < 40$. $Z_{\max}$ достигается в вершине $B(35; 7,5)$ и равен $700 + 7,5\lambda$.
3. $\lambda = 40$. Оптимальными являются точки отрезка AB , $Z_{\max} = 1000$.
4. $40 < \lambda < +\infty$. Оптимальная точка – вершина $A(150/7; 100/7)$, $Z_{\max} = 3000/7 + (100/7)\lambda$.
5. $\lambda = +\infty$. Максимум Z достигается в вершине A .

В заключение скажем несколько слов о поиске минимума целевой функции. При поиске минимума линию уровня нужно передвигать в направлении вектора $-\bar{c}$, из чего вытекают следующие правила:

1. При $\lambda = -\infty$ (начало поиска минимума) $Z_{\min}$ достигается в той вершине (во всех точках отрезка) допустимой области, где достигался $Z_{\max}$ при $\lambda = +\infty$ (конец поиска максимума).
2. При $\lambda = +\infty$ (конец поиска минимума) $Z_{\min}$ достигается в той вершине (во всех точках отрезка) допустимой области, где достигался $Z_{\max}$ при $\lambda = -\infty$ (начало поиска максимума).
3. При $-\infty < \lambda < +\infty$ $Z_{\min}$ достигается в тех вершинах и отрезках границы допустимой области, которые не были задействованы при поиске максимума.

Четвертая задача анализа на чувствительность. Требуется выяснить, как меняется оптимальное решение при изменении коэффициентов при неизвестных в системе ограничений.

Рассмотрим ограничение по запасам сырья из нашего примера

$$2x_1 + 4x_2 < 100.$$

Заменим константу 2 переменной a_1 и рассмотрим уравнение прямой

$$a_1x_1 + 4x_2 = 100. \quad (2.4)$$

Будем менять коэффициент a_1 от 0 до ∞ . Прямая (2.4) проходит через точку $(0; 25)$ при любых значениях коэффициента a_1 . Когда a_1 меняется от 0 до ∞ , прямая (2.4) совершает поворот на 90° из начального горизонтального положения ($a_1 = 0$) в конечное вертикальное ($a_1 = +\infty$). Легко убедиться, что вращение происходит по часовой стрелке (рис. 2. 12).

Когда $a_1 = 0$, $Z_{\max}$ достигается в точке $K(35; 70/3)$: если продукция A совсем не требует расхода сырья, ее нужно изготовить как можно больше. Но ограничения не позволяют изготовить более 35 единиц продукции A . Оптимальное значение x_2 находится из уравнения $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$. Если $x_1 = 35$, то $x_2 = 70/3$; $Z_{\max} = 20 \times 35 + 40 \times 70/3 = 4900/3$.

Точка K будет оптимальной до тех пор, пока прямая $a_1x_1 + 4x_2 = 100$ будет проходить выше вершины K . Последний раз максимум Z будет достигаться в точке K , когда прямая $a_1x_1 + 4x_2 = 100$ пройдет через нее. Определим значение a_1 .

$$a_1x_1 + 4x_2 = 100; \quad 35a_1 + 4 \times (70/3) = 100; \quad a_1 = 4/21 \approx 0,19.$$

Если a_1 становится больше 4, от допустимой области остается только треугольник ABE . Оптимальная вершина – A , ее координаты таковы: $x_1=15$, x_2 определяется из условия $a_1 \times 15 + 4x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 25 - 3,75a_1$. Тогда $Z_{\max} = 20 \times 15 + 40(25 - 3,75a_1) = 1300 - 150a_1$.

Найдем то значение a_1 , при котором допустимая область становится пустой (не хватает сырья для изготовления 15 необходимых изделий A). Это случится, когда прямая AB пройдет через точку E . Следовательно, $a_1 \times 15 + 4 \times 0 = 100$, $a_1 = 20/3$. Значит, если $20/3 < a_1 < +\infty$, допустимая область пуста, ЗЛП не имеет решения. Подведем итоги.

1. $0 \leq a_1 \leq 4/21$. Оптимальная вершина – $K(35, 70/3)$, $Z_{\max} = 4900/3$.
2. $4/21 < a_1 < 2$. Оптимальная вершина – B . Она лежит на пересечении прямых $x_1=35$ и $a_1x_1 + 4x_2 = 100$. Координаты вершины B : $x_1=35$, $x_2 = 25 - 8,75a_1$. $Z_{\max} = 1700 - 350a_1$.
3. $a_1 = 2$. Оптимальное решение достигается во всех точках отрезка AB . Вершина $A(150/7; 100/7)$ лежит на пересечении прямых $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$ и $2x_1 + 4x_2 = 100$. Вершина $B(35; 7,5)$ лежит на пересечении прямых $2x_1 + 4x_2 = 100$ и $x_1 = 35$. $Z_{\max} = 1000$.
4. $2 < a_1 \leq 4$. Максимум целевой функции достигается в точке A с координатами $x_1 = 150/(1,5a_1 + 4)$; $x_2 = 100/(1,5a_1 + 4)$. Точка A лежит на пересечении прямых $0,4x_1 - 0,6x_2 = 0$ и $a_1x_1 + 4x_2 = 100$. $Z_{\max} = 7000/(1,5a_1 + 4)$.
5. $4 < a_1 \leq 20/3$. Оптимальная вершина – $A(15, 25 - 3,75a_1)$. Точка A лежит на пересечении прямых $a_1x_1 + 4x_2 = 100$ и $x_1 = 15$. $Z_{\max} = 1300 - 150a_1$.
6. $a_1 > 20/3$. Допустимая область пуста, задача не имеет решения.

2.3. Задачи

В задачах 1 – 5 нужно построить допустимую область данной системы ограничений.

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1. $-x_1 + 2x_2 \leq 4$; | 2. $x_1 + 2x_2 \geq 4$ |
| $5x_1 + 2x_2 \geq 10$; | $5x_1 + 2x_2 \geq 10$; |
| $4x_1 - 3x_2 \leq 12$; | $4x_1 - 3x_2 \leq 12$; |
| $7x_1 + 4x_2 \leq 28$. | $x_1, x_2 \geq 0$. |
| 3. $-x_1 + x_2 \leq 2$; | 4. $x_1 - x_2 \geq -3$; |
| $5x_1 + x_2 \leq 2$; | 5. $x_1 - 2x_3 + x_4 = 4$; |
| | $6x_1 + 7x_2 \leq 42$; |
| | $x_2 + x_3 + x_4 = 5$; |

$$5x_1 - 2x_2 \leq 10; \quad 2x_1 - 3x_2 \leq 6; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad x_1 + x_2 \geq 4.$$

Указание. Равенство $x_1 - 2x_3 + x_4 = 4$ преобразовать в неравенство $-2x_3 + x_4 \leq 4$, учитывая, что $x_1 \geq 0$. Аналогично преобразовывается второе равенство.

6. Описать систему неравенств по ее допустимой области (рис. 2.13).

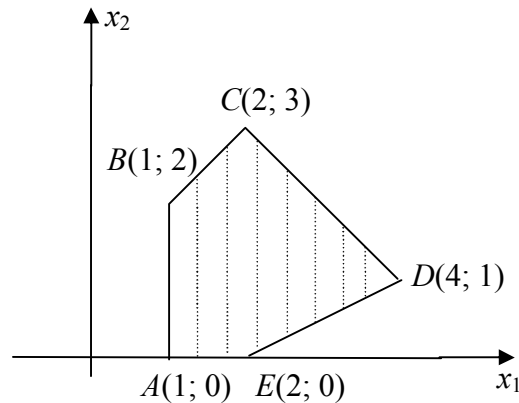


Рис. 2.13

7. Описать систему неравенств по ее допустимой области (рис. 2.14).

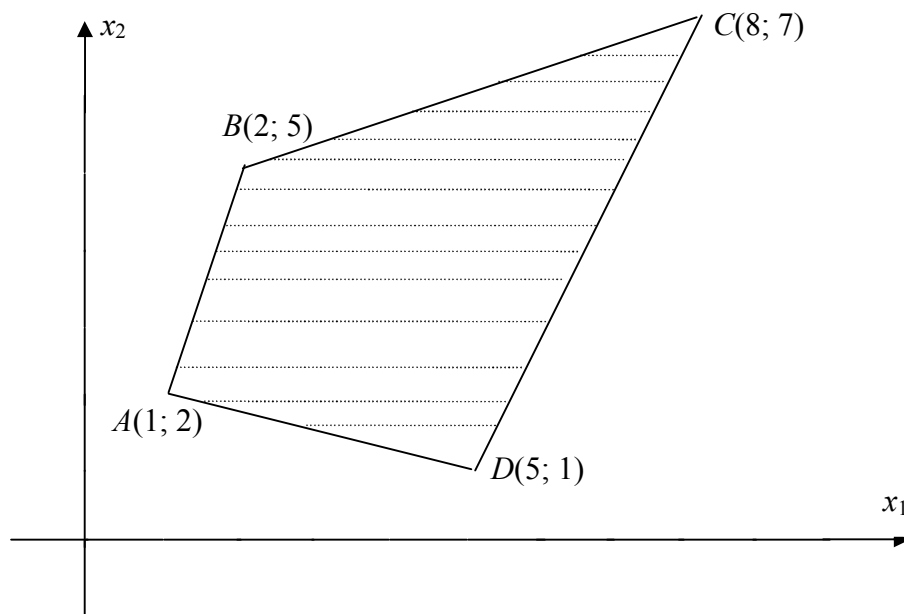


Рис. 2.14

В задачах 8 – 26 требуется решить ЗЛП графически.

8. $Z = 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min)$; 9. $Z = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21;$$

$$3x_1 - x_2 \leq 6;$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 49;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$10. Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 2;$$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq 2.$$

11. Допустимая область задана на рис. 2.13. Целевые функции следующие:

$$Z = 2x_1 + 6x_2 \rightarrow \max(\min); \quad Z = -3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max(\min); \quad Z = x_1 \rightarrow \max(\min).$$

$$12. Z = 3x_1 - 2x_2 \Rightarrow \max(\min); \quad 13. Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 - x_2 \leq 1;$$

$$x_1 - x_2 \leq 1;$$

$$x_1 + x_2 \geq 2;$$

$$x_1 + x_2 \geq 2;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$14. Z = -2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4.$$

$$15. Z = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$16. Z = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 14;$$

$$-5x_1 + 3x_2 \leq 15;$$

$$4x_1 + 6x_2 \geq 24;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$17. -2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 12;$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$18. Z = -3x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6;$$

$$x_1 - x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$19. Z = -3x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min);$$

$$x_1 + x_2 \geq 1;$$

$$x_1 - x_2 \leq 1;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$20. Z = -5x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max(\min);$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 4;$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1;$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Рассмотреть случаи: а) $\alpha = \beta = 1$; б) $\alpha = 2, \beta = 3$; в) $\alpha = 6, \beta = -6$.

Указание к задаче 20. Выразить переменную x_3 через переменные x_1 , x_2 и подставить это выражение в целевую функцию и левые части второго и третьего ограничений. Уравнение вида $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$ можно заменить неравенством $x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$, учитывая, что $x_4 \geq 0$.

21. $Z = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max(\min)$;

$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 5; \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \quad x_1 + x_2 + x_5 = 8;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

22. $Z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \rightarrow \max(\min)$;

$$2x_1 - x_2 - x_3 = -1; \quad x_1 - 3x_2 - x_4 = -13; \quad 4x_1 + x_2 + x_5 = 26;$$

$$x_1 - 3x_2 + x_6 = 0; \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

23. Из стандартных листов фанеры нужно вырезать заготовки трех видов в количестве 24, 31, 18 штук соответственно. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Числа получаемых заготовок при данном способе раскроя одного листа фанеры приведены в таблице, где даны и величины отходов (в условных единицах) для каждого способа раскроя.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.)	
	Способ раскроя 1	Способ раскроя 2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов	12	16

Сколько листов фанеры следует раскроить каждым способом, чтобы минимизировать отходы и получить требуемое количество заготовок?

24. Автозавод выпускает две модели автомобилей: A и (более дешевую) B . На заводе работают 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждый из которых работает по 40 часов в неделю. Для изготовления модели A требуется 30 часов неквалифицированного и 50 часов квалифицированного труда. Для изготовления модели B требуется 40 часов неквалифицированного и 20 часов квалифицированного труда. Расходы на сырье и комплектующие изделия составляют 3000 условных единиц для модели A и 1000 условных единиц для модели B . Суммарные расходы не должны превышать 1800000 ед. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают 5 дней в неделю и могут отгрузить с завода не более 210 машин в день.

Каждая модель A приносит 2000 ед. прибыли, а модель B – 1000 ед. Каков оптимальный объем выпуска моделей?

25. Изготавливаются два вида деталей. Заготовки должны пройти последовательную обработку на трех станках. Каждый станок не может работать более 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль (условные единицы) от продажи одного изделия указаны в таблице. Каковы оптимальные объемы производства изделий каждого вида?

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Прибыль, ед.
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	4
2	5	20	15	6

26. Фирма рекламирует свою продукцию, используя радио и телевидение. Бюджет фирмы не позволяет тратить на рекламу более 1000 ед. в месяц. Каждая минута радиорекламы стоит 5 ед., телерекламы – 100 ед. Фирма предполагает использовать радиорекламу по крайней мере в два раза чаще, чем телерекламу. Опыт прошлых лет показал, что одна минута телерекламы обеспечивает в 25 раз больший объем сбыта в сравнении с одной минутой радиорекламы. Распределить средства, выделенные на рекламу, оптимальным образом. Каким должно быть соотношение между ростом объема сбыта в результате использования одной минуты каждого из видов рекламы, чтобы все средства вкладывать только в радиорекламу?

27. Модель ЗЛП такова

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 \leq 4 \text{ (ресурс 1); } 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ (ресурс 2);}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Определить:

1. На сколько нужно увеличить запас ресурса 1, чтобы первое ограничение стало несвязывающим?. На сколько увеличится при этом целевая функция?
2. Как нужно уменьшить запас ресурса 2, чтобы первое ограничение стало несвязывающим? Как уменьшится при этом целевая функция?

28. Проанализировать решение задачи 25 и ответить на следующие вопросы.

1. Какие ограничения являются связывающими, какие нет?
2. На сколько можно уменьшить предельно допустимые суммарные расходы на сырье и комплектующие изделия, чтобы оптимальное решение не изменилось?
3. Каков интервал значений прибыли от продажи машины А, для которого оптимальное решение остается неизменным?

29. Проанализировать решение задачи 26 и ответить на следующие вопросы.

1. Для каких станков в оптимальном решении время работы не является дефицитным ресурсом?

2. Сколько машино-часов остается неиспользованными?

В задачах 31 – 35 целевая функция содержит параметр λ , $-\infty < \lambda < \infty$.

Описать решение задач для всех возможных значений λ .

30. $Z = 2x_1 + \lambda x_2 \rightarrow \max(\min)$; 31. $Z = x_1 + \lambda x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$-x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 12;$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq -6;$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15;$$

$$5x_1 + x_2 \leq 10.$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

32. $Z = x_1 - \lambda x_2 \rightarrow \max(\min)$; 33. $Z = \lambda x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$-x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$2x_1 + x_2 \geq -6;$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$x_1 - x_2 \leq 2;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

34. $Z = -\lambda x_1 + 4x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$x_1 + x_2 \leq 4;$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ограничения задач 35 – 40 содержат параметр λ , $-\infty < \lambda < \infty$. Описать решение задач для всех возможных значений λ .

35. $Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max(\min)$; 36. $Z = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$x_1 - 2x_2 \leq 2;$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9;$$

$$\lambda x_1 + x_2 \leq 3;$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1 - \lambda x_2 \leq -2;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

37. $Z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$;

38. $Z = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$\lambda x_1 - x_2 \leq 4;$$

$$2x_1 + \lambda x_2 \leq 2;$$

$$x_2 \leq 3;$$

$$x_1 + x_2 \geq 1;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

39. $Z = -x_1 - x_2 \rightarrow \max(\min)$;

40. $Z = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \max(\min)$;

$$-\lambda x_1 + x_2 \leq 2;$$

$$2x_1 - \lambda x_2 \geq 4;$$

$$5x_1 - x_2 \leq 10; \quad x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + x_2 \geq 12; \quad x_1 \geq 0$$

В задачах 41 – 44 целевая функция Z – дробно-линейная функция. Она записывается в виде $Z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2}$.

Обозначим эту дробь через h . Тогда можно записать, что

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h(d_1x_1 + d_2x_2) \text{ или, по-другому, } x_2 = \frac{c_1 - hd_1}{hd_2 - c_2}x_1.$$

Получилось уравнение прямой, проходящей через начало координат. Точки этой прямой, принадлежащие одновременно и допустимой области, это те решения задачи, на которых целевая функция равна числу h .

$$41. \quad Z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \min;$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 24;$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$42. \quad Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \max;$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16;$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4;$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 9;$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$43. \quad Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \rightarrow \min;$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 12;$$

$$x_1 + x_2 \geq 10;$$

$$x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$44. \quad Z = \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \rightarrow \max;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12;$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 3;$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 18;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$45. \quad Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \rightarrow \max;$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16;$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 18;$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. ОПОРНЫЕ РЕШЕНИЯ (ОР)

3.1. Определение канонической формы ЗЛП

Говорят, что ЗЛП задана в *каноническом виде*, если ее целевая функция максимизируется, система ограничений – это система линейных уравнений, а на все переменные наложено условие неотрицательности. Кроме того, предполагается, что число n переменных больше числа m уравнений, т.е. система ограничений имеет бесконечно много решений.

Таким образом, каноническая форма ЗЛП такова:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \quad (3.1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \quad (3.2')$$

Задачу (3.1) – (3.2') можно записать компактней. Обозначим через $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерный вектор неизвестных; через $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ n -мерный вектор коэффициентов целевой функции; через $\bar{b}_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ m -мерный вектор правых частей; через

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицу размера $m \times n$ коэффициентов системы линейных уравнений (3.2).

Тогда задача (3.1) – (3.2') записывается так:

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max,$$

$$A\bar{x} = \bar{b}_0, \quad \bar{x} \geq \bar{0},$$

где $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – n -мерный нуль-вектор, $(\bar{c}, \bar{x})$ – скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{x}$.

3.2. Приведение произвольной ЗЛП к каноническому виду

Чтобы представить задачу (3.1) – (3.2') в канонической форме, нужно уметь:

1. Переходить от задачи минимизации целевой функции к задаче
2. Переходить от неравенств к уравнениям.

3. Переходить от переменной, которая может быть любого знака, к переменной, на которую наложено условие неотрицательности.

Под выражением «нужно уметь переходить» понимается утверждение о переходе от исходной ЗЛП к ЗЛП, заданной в канонической форме так, чтобы, зная оптимальное решение канонической ЗЛП, указать оптимальное решение исходной.

Замена минимизации целевой функции на максимизацию. Из очевидного равенства $\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\max(-f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ следует, что вместо минимума целевой функции $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ можно искать максимум функции $-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$. Найденные оптимальные значения неизвестных минимизируют исходную функцию.

Переход от неравенств к уравнениям. Рассмотрим неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b. \quad (3.3)$$

Пусть вектор $\bar{x} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – некоторое решение этого неравенства. Тогда $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b$. Обозначим разность $b - a_1\beta_1 - a_2\beta_2 - \dots - a_n\beta_n$ через β_{n+1} . Тогда $\beta_{n+1} \geq 0$ и вектор $\bar{x} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ – решение уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b. \quad (3.4)$$

Пусть теперь вектор $\bar{x} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$, $\beta_{n+1} \geq 0$ есть решение уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b$. Так как $\beta_{n+1} \geq 0$, то вектор $\bar{x} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – решение неравенства $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \leq b$.

Установлено взаимно однозначное соответствие между всеми решениями неравенства (3.3) и уравнения (3.4). В этом смысле неравенство (3.3) эквивалентно уравнению (3.4).

Так как в целевую функцию Z переменная x_{n+1} не входит, то значения Z на соответствующих друг другу решениях неравенства (3.3) и уравнения (3.4) совпадают. Другими словами, неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$$

приводится к уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

если прибавить дополнительную неотрицательную переменную x_{n+1} к левой части неравенства.

Аналогично из неравенства

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_n\beta_n \geq b \quad (3.5)$$

получается эквивалентное уравнение

Пример. Привести к каноническому виду следующую ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \min ; \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 &\leq 12; \quad 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leq 17; \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\geq 15; \quad x_1, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение.

1. Так как переменная x_2 может принимать любые значения, как положительные, так и отрицательные, представим ее как разность двух неотрицательных переменных, которые обозначим x_3 и x_4 , тогда $x_2 = x_3 - x_4$. Переменную x_3 теперь будем обозначать через x_2 .
2. Превратим два ограничения вида $\leq$ в равенства, прибавив к их левым частям дополнительные неотрицательные переменные x_5 и x_7 .
3. Превратим ограничение вида $\geq$ в равенство, вычитая из его левой части дополнительную неотрицательную переменную x_6 . Дополнительные переменные x_5 , x_6 , x_7 не входят в целевую функцию Z .
4. В результате указанных преобразований целевая функция станет такой: $Z_1 = -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$.
5. Система ограничений примет вид:
$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 + x_5 &= 12; \\ -4x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_6 &= 15; \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_7 &= 17; \\ x_1, x_2, \dots, x_7 &\geq 0. \end{aligned}$$
6. Последнее, что осталось сделать – заменить целевую функцию Z_1 функцией $Z_2 = -Z_1$ и потребовать максимизации функции Z_2 :
$$Z_2 = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \rightarrow \max.$$

Каноническая модель ЗЛП построена.

Если теперь $\bar{x} = (d_1, d_2, \dots, d_7)$ – оптимальное решение построенной ЗЛП, то оптимальное решение исходной ЗЛП следующее:

$$x_1 = d_1; \quad x_2 = d_3 - d_4; \quad x_3 = d_2.$$

3.3. Решение системы линейных уравнений по методу Гаусса (методу исключения неизвестных)

Рассмотрим систему линейных уравнений с m уравнениями и n неизвестными, причем $m > n$.

[illegible]

Положим, что все уравнения этой системы линейно независимы, никакое из уравнений этой системы не есть линейная комбинация других уравнений. Нетрудно показать, что следующие элементарные преобразования не меняют множество решений системы (3.9).

1. Почленное умножение всех коэффициентов и правой части некоторого уравнения на одно и то же число.
2. Прибавление к одному из уравнений системы линейной комбинации других уравнений.

Используя перечисленные преобразования, систему (3.9) можно привести к виду, для которого описание множества решений системы (3.9) не представляет труда. Для этого в каждом уравнении нужно оставить переменную, которая исключается из всех остальных уравнений системы. Такая переменная называется **базисной переменной данного уравнения**. Базисная переменная входит в свое уравнение с коэффициентом 1, во все остальные уравнения эта переменная входит с коэффициентом 0. Любую переменную можно сделать базисной в любом уравнении.

Пример. Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= 15. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Переменная x_4 входит в первое уравнение с коэффициентом 1. Исключим ее из второго уравнения. Для этого прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 3. Система (3.10) станет такой:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 15. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выберем, например, переменную x_1 в качестве базисной для второго уравнения. Для этого сначала поделим на 5 все коэффициенты и правую часть второго уравнения, чтобы коэффициент при x_1 стал равным 1. Система (3.11) примет вид

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4; \\ x_1 + 1,2x_2 + 1,4x_3 &= 3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Исключим x_1 из первого уравнения. Для этого прибавим к первому уравнению второе, умноженное на -2 . Получим систему

$$\begin{aligned} -1,6x_2 - 0,8x_3 + x_4 &= -2; \\ x_1 + 1,2x_2 + 1,4x_3 &= 3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Система (3.13) – это та же исходная система (3.10), но решения системы (3.13) можно выписать сразу. Переменная x_4 входит только в первое уравнение, ее можно выразить через переменные x_2, x_3 . По этой же причине переменная x_1 немедленно выражается через переменные x_2, x_3 .

$$\begin{aligned} x_4 &= -2 + 1,6x_2 + 0,8x_3; \\ x_1 &= 3 - 1,2x_2 - 1,4x_3. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Переменные, не являющиеся базисными, называются **свободными переменными**. В нашем случае свободны переменные x_2, x_3 .

Если в совместной системе уравнений число неизвестных больше числа уравнений, то такая система имеет бесконечно много решений. Свободные переменные могут принимать любые значения, базисные переменные однозначно определяются через свободные. Например, если положить $x_2 = x_3 = 1$, то $x_4 = 0,4$; $x_1 = 0,4$.

Систему уравнений, приведенную к виду, когда в каждом уравнении есть своя базисная переменная, назовем записанной в **стандартной форме**. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем считать, что базисная переменная первого уравнения – это переменная x_1 , второго – x_2 , ..., m -го уравнения – x_m . Коэффициент в i -м уравнении при переменной x_j будем обозначать x_{ij} , правую часть i -го уравнения стандартной системы обозначим через x_{i0} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Свободные переменные стандартной системы – это переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, они могут принимать любые значения. Значения базисных переменных однозначно вычисляются по значениям свободных. Система (3.9), приведенная к стандартной форме, такова:

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_{1m+1}x_{m+1} + \dots + x_{1n}x_n = x_{10}; \\ &\dots\dots\dots; \\ x_i &+ x_{im+1}x_{m+1} + \dots + x_{in}x_n = x_{i0}; \\ &\dots\dots\dots; \\ x_m &+ x_{mm+1}x_{m+1} + \dots + x_{mn}x_n = x_{m0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Общее решение системы (3.15) таково:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} - x_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - x_{1n}x_n; \\ &\dots\dots\dots; \\ x_i &= x_{i0} - x_{im+1}x_{m+1} - \cdots - x_{in}x_n; \\ &\dots\dots\dots; \\ x_m &= x_{m0} - x_{mm+1}x_{m+1} - \cdots - x_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.4. Опорные решения

Далее будем считать, что система (3.9) и эквивалентная ей система (3.15) являются системой ограничений некоторой канонической ЗЛП. Поэтому на переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ наложены условия неотрицательности. Свободные переменные системы (3.15) уже не совсем свободны. Они могут принимать только неотрицательные значения и только такие, что вычисленные по формулам (3.16) значения базисных переменных также получаются неотрицательными.

Среди бесконечного множества решений системы (3.15) мы выделим конечный набор решений, каждое из которых называется **опорным**. Исключительная роль опорных решений при поиске оптимального решения ЗЛП будет обоснована позже. А сейчас просто определим, что такое опорное решение.

Пусть система (3.9) записана в стандартной форме. Решение, в котором *все свободные переменные равны нулю*, и есть опорное. Следовательно, в любом опорном решении базисные переменные равны правым частям системы ограничений.

Чтобы все базисные переменные были неотрицательными, все правые части должны быть неотрицательными. Далее вместо сочетания опорное решение будем писать ОР.

Система (3.13) не позволяет получить ОР. Если положить $x_2 = x_3 = 0$, то $x_4 = -2 < 0$. Попробуем найти несколько ОР системы (3.10). Для этого каждый раз нужно указать пару базисных переменных и привести систему к стандартной форме. Если обе правые части окажутся неотрицательными, ОР налицо. В общем случае можно выбрать C_n^m наборов базисных переменных, всего, следовательно, ОР не более чем C_n^m штук. Для системы (3.10) получаем $C_4^2 = 6$ вариантов выбора базисных переменных.

Один из них – (x_1, x_4) – мы уже рассмотрели, осталось 5 возможностей: (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_3) , (x_2, x_4) , (x_3, x_4) .

Перейдем от системы (3.13) к системе, в которой базисная переменная первого уравнения – x_2 . Для чего поделим на $-1,4$ все коэффициенты первого уравнения и исключим затем x_2 из второго уравнения. Получим систему

$$\begin{aligned} x_2 + 4/7x_3 - 5/7x_4 &= 10/7; \\ x_1 + 5/7x_3 + 6/7x_4 &= 9/7. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ОР таково: $x_4 = x_3 = 0$; $x_1 = 9/7$; $x_2 = 10/7$. Коротко это можно записать так: $\bar{x} = (9/7; 10/7; 0; 0)$.

Сделаем теперь x_3 базисной переменной второго уравнения. Поделим все коэффициенты второго уравнения на $5/7$ и затем исключим x_3 из первого уравнения. Получим систему

$$\begin{aligned} -0,8x_1 + x_2 - 1,4x_4 &= 0,4; \\ 1,4x_1 + x_3 + 1,2x_4 &= 1,8. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Соответствующее ОР: $\bar{x} = (0; 0,4; 1,8; 0)$.

3.5. Переход от одного опорного решения к другому

Мы видели, как менялась система (3.10) после элементарных преобразований. Менялись коэффициенты при неизвестных и правые части, но не менялось множество решений этой системы. Далее будут выведены формулы, по которым можно пересчитать коэффициенты при неизвестных и правые части системы, приведенной к стандартной форме, когда в одном из уравнений заменяется базисная переменная.

Пусть в r -м уравнении базисной была переменная x_r , а станет переменная x_s . Следовательно, переменная x_s входит в r -е уравнение с ненулевым коэффициентом x_{rs} . Чтобы переменная x_s стала базисной, она должна входить в r -е уравнение с коэффициентом 1. Значит, все коэффициенты и правую часть r -го уравнения нужно разделить на число x_{rs} . Потом нужно исключить переменную x_s из всех остальных уравнений системы. Если в i -е уравнение переменная x_s входит с коэффициентом x_{is} , чтобы исключить ее из i -го уравнения, нужно прибавить к нему r -е

уравнение (после деления на число x_{rs}), умноженное на число $-x_{is}$. Выпишем i -е и r -е уравнения до и после преобразований. В скобках указаны коэффициенты после преобразований.

$$\begin{aligned}
 & x_{i1}x_1 + \dots + x_{is}x_s + \dots + x_{ij}x_j + \dots + x_{in}x_n = x_{i0}; \\
 & (x_{i1} - \frac{x_{r1}}{x_{rs}}x_{is}); \quad (0); \quad (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rs}}x_{is}); \quad (x_{in} - \frac{x_{rn}}{x_{rs}}x_{is}); (x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rs}}x_{is}); \\
 & x_{r1}x_1 + \dots + x_{rs}x_s + \dots + x_{rj}x_j + \dots + x_{rn}x_n = x_{r0}; \\
 & (\frac{x_{r1}}{x_{rs}}); \quad (1); \quad (\frac{x_{rj}}{x_{rs}}); \quad (\frac{x_{rn}}{x_{rs}}); \quad (\frac{x_{r0}}{x_{rs}}).
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Если обозначить новый коэффициент при переменной x_j в i -м уравнении через x'_{ij} , то формула для его вычисления такова:

$$\begin{aligned}
 x'_{ij} &= (x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rs}}x_{is}), \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad i \neq r; \\
 x'_{rj} &= (\frac{x_{rj}}{x_{rs}}), \quad j = 0, 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Вычисления новых коэффициентов удобно свести в таблицу (табл.3.1). Покажем расчеты на примере. Обратимся к системе (3.18) и заменим во втором уравнении базисную переменную x_3 на переменную x_4 .

В табл. 3.1 «упакована» система уравнений. Но в строках и столбцах стоят только коэффициенты при переменных, обозначения переменных вынесены в первую строку.

В части I табл. 3.1 записана система (3.18), в части II – преобразованная система. Базисная переменная x_3 заменена на переменную x_4 .

Чтобы переменная x_4 стала базисной во втором уравнении, нужно поделить все коэффициенты второго уравнения на число 1,2 – коэффициент при x_4 , $x_{rs} = x_{24} = 1,2$. Назовем коэффициент x_{rs} **опорным элементом** таблицы, покажем в таблице опорный элемент жирным курсивом. Новые коэффициенты второго уравнения указаны в части I табл. 3.1 в скобках рядом со старыми.

Таблица 3.1

Базисная переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	Правая часть
I	x_2	$-4/5$	1	$-7/5$	$2/5$
	x_3	$7/5 - (7/6)$	0 (0)	$1 (5/6)$	$9/5 (9/6)$
II	x_2	$5/6$	1	$6/7$	$5/2$
	x_4	$7/6$	0	$5/6$	$3/2$

$x'_{21} = 1,4 / 1,2 = 7/6$; $x'_{22} = 0$; $x'_{23} = 1 / 1,2 = 5/6$; $x'_{24} = 1$; $x'_{20} = 1,8 / 1,2 = 1,5$.

В части II табл. 3.1 можно заполнить вторую строку.

Пересчитаем элементы первой строки.

Во второй строке части I табл.3.1 в скобках записаны отношения $\frac{x_{rj}}{x_{rs}}$.

Поэтому сразу можно записать:

$$x'_{11} = (-4,5) - (7/6) \times (-7,5) = 5/64; \quad x'_{12} = 1; \quad x'_{13} = 0 - (5/6) \times (-7/5) = 7/6;$$

$$x'_{14} = 0; \quad x'_{10} = 2/5 - 9/6 \times (-7/5) = 5/2.$$

Чтобы каждый раз не пользоваться громоздкой формулой, можно обратиться к простому геометрическому правилу пересчета коэффициентов («диагональному» правилу). Нужно мысленно соединить пересчитываемое число и опорный элемент диагональю прямоугольника, а затем построить вторую диагональ. Так, если соединить число $-4/5$ (x_{11}) с опорным элементом (x_{24}), то на второй диагонали окажутся числа $-7/5$ (x_{14}) и $7/6$ (x'_{21}). Чтобы получить новое значение коэффициента x_{11} (x'_{11}), нужно из прежнего значения x_{11} вычесть произведение чисел, стоящих на второй диагонали, т.е. $x'_{11} = (-4/5) - (7/6) \times (-7/5) = 5/6$.

Теперь можно указать новое ОР: $\bar{x}_1 = (0; 15/6; 0; 9/6)$. Оно легко находится из табл.3.1, свободные переменные x_1, x_3 равны нулю, а базисные переменные x_2, x_4 равны правым частям.

3.6. Вырожденные и невырожденные опорные решения

ОР называется **невыврожденным**, если все базисные переменные больше нуля, и **вырожденным** в противном случае (хотя бы одна базисная переменная равна нулю). До сих пор мы приводили примеры только невырожденных ОР. Обратимся к случаю вырожденности. Пусть система уравнений будет такой

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \quad x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1.$$

Переменные x_1, x_3 не могут быть базисными одновременно. Исключение одной из них из какого-либо уравнения влечет исключение другой. Переменные x_2, x_4 также не могут быть базисными одновременно. Если положить $x_1 = x_3 = 0$, то первое уравнение примет вид: $-x_2 - x_4 = 1$. В любом решении такого уравнения хотя бы одна из двух переменных меньше нуля. Исключим переменную x_1 из второго уравнения, а переменную x_2 из первого. Исходная система станет выглядеть так:

$$x_1 + x_3 - 1,5x_4 = 1; \quad x_2 - 0,5x_4 = 0.$$

Если считать базисной переменной первого уравнения переменную x_1 , получим ОР = (1; 0; 0; 0); если считать, что базисная переменная первого уравнения – это x_3 , получается ОР = (0; 0; 1; 0). Оба эти ОР вырожденные, только одна базисная переменная больше нуля. После умножения на -2 второго уравнения и исключения x_4 из первого система приводится к виду $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \quad -2x_2 + x_4 = 0$.

Никаких новых ОР не получено. Но теперь базисная переменная второго уравнения – x_4 . Таким образом, если задано вырожденное ОР, *нужно дополнительно указать, какие из равных нулю переменных свободные, какие – базисные.*

3.7. Выражение целевой функции Z через свободные переменные. Оценки свободных переменных

Рассмотрим каноническую ЗЛП с системой ограничений, приведенной к стандартному виду.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min) : \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
& x_1 + x_{1m+1}x_{m+1} + \dots + x_{1n}x_n = x_{10}; \\
& \dots\dots\dots; \\
& x_i + x_{im+1}x_{m+1} + \dots + x_{in}x_n = x_{i0}; \\
& \dots\dots\dots;
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& x_m + x_{mm+1}x_{m+1} + \dots + x_{mn}x_n = x_{m0}. \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.22'}$$

Выразим свободные переменные через базисные и подставим эти выражения в целевую функцию Z . Когда целевая функция зависит только от свободных переменных, ее анализ упрощается, ведь свободные переменные могут принимать почти любые значения. Нужно только позаботиться о выполнении условия (3.22') неотрицательности всех переменных.

$$\begin{aligned}
Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n &= c_1(x_{10} - x_{1m+1}x_{m+1} - x_{1m+2}x_{m+2} - \dots - x_{1n}x_n) + \dots + \\
&+ c_m(x_{m0} - x_{mm+1}x_{m+1} - \dots - x_{mn}x_n) + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_nx_n = c_1x_{10} + \\
&+ \dots + c_mx_{m0} + x_{m+1}(c_{m+1} - c_1x_{1m+1} - c_2x_{2m+2} \dots - c_mx_{mm+1}) + \dots + \\
&+ x_n(c_n - c_1x_{1n} - \dots - c_mx_{mn}) = Z_0 - (\Delta_{m+1})x_{m+1} - \dots - (\Delta_n)x_n,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где через Z_0 , Δ_{m+1} , ..., Δ_n обозначены соответственно числа:

$$Z_0 = c_1x_{10} + c_2x_{20} + \dots + c_mx_{m0} = \sum_{i=1}^m c_ix_{i0}; \tag{3.24}$$

$$\Delta_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_mx_{mj} - c_j = \sum_{i=1}^m c_ix_{ij} - c_j; \quad j = m+1, \dots, n.$$

Числа Δ_j , $j = m+1, \dots, m+2, \dots, n$ называются **оценками** свободных переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$.

Число Z_0 – это значение целевой функции Z , когда все свободные переменные равны 0.

Коротко выражение для оценки Δ_j можно записать так: $\Delta_j = (\bar{c}_{\text{баз}}, \bar{x}_j) - c_j$, где $\bar{c}_{\text{баз}}$ – вектор коэффициентов целевой функции при *базисных переменных*. В общем случае первая компонента этого вектора равна коэффициенту целевой функции Z при базисной переменной первого уравнения, вторая компонента вектора $\bar{c}_{\text{баз}}$ – коэффициент целевой функции при базисной переменной второго уравнения, последняя, m -я компонента вектора $\bar{c}_{\text{баз}}$ – коэффициент целевой функции при базисной переменной m -го уравнения.

Вектор $\bar{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ – это вектор коэффициентов при переменной x_j в системе (3.23).

Число Z_0 – это скалярное произведение векторов $\bar{c}_{\text{баз}}$ и $\bar{x}_0$, $Z_0 = (\bar{c}_{\text{баз}}, \bar{x}_0)$, где вектор $\bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ состоит из правых частей системы (3.23).

Число c_j – это коэффициент при свободной переменной x_j в целевой функции Z .

Оценки свободных переменных и число Z_0 удобно считать с помощью таблицы. Для этого в таблицу добавляется еще одна строка, в которой и записывают оценки.

Пример. Пусть дана такая ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 &= 6; \\ x_1, x_2, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Выразим целевую функцию Z через свободные переменные x_1, x_2, x_3 (табл. 3.2).

В первой строке табл.3.2 над переменными $x_1, x_2, \dots, x_5$ записаны соответствующие коэффициенты целевой функции.

$$Z_0 = c_4x_{10} + c_5x_{20} = -3 \times 4 + 1 \times 6 = -6.$$

Число Z_0 записано в последней строке столбца правых частей.

$$\Delta_1 = c_4x_{11} + c_5x_{21} - c_1 = -3 \times 2 + 1 \times 1 - 4 = -9;$$

$$\Delta_2 = c_4x_{12} + c_5x_{22} - c_2 = -3 \times 1 + 1 \times (-3) - (-2) = -4;$$

$$\Delta_3 = c_4x_{13} + c_5x_{23} - c_3 = -3 \times (-2) + 1 \times 1 - 2 = 5.$$

Числа $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ записаны в последней строке табл. 3.2 в столбцах, соответствующих переменным x_1, x_2, x_3 .

Таблица 3.2

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	-2	2	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-3	2	1	-2	1	0	4
x_5	1	1	-3	1	0	1	6
Z		-9	-4	5	0	0	-6

Оценки базисных переменных x_4 и x_5 равны, разумеется, нулю, ведь эти переменные исключаются из целевой функции.

Итак, после исключения переменных x_4 и x_5 целевая функция Z такова:

$$Z = Z_0 - (\Delta_1)x_1 - (\Delta_2)x_2 - (\Delta_3)x_3 = -6 + 9x_1 + 4x_2 - 5x_3.$$

Подчеркнем, что формулы $Z = -6 + 9x_1 + 4x_2 - 5x_3$ и

$$Z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5$$

описывают *одну и ту же целевую функцию*, если только подставлять в эти выражения *решения системы* (3.25).

Заметим еще, что запись

$$Z = Z_0 - (\Delta_{m+1})x_{m+1} - \dots - (\Delta_n)x_n \quad (3.26)$$

можно представить в виде

$$Z + \Delta_{m+1}x_{m+1} + \dots + \Delta_nx_n = Z_0 \quad (3.27)$$

и трактовать как еще одно линейное уравнение, добавленное к системе (3.21). Это уравнение ничем не отличается от остальных уравнений системы (3.21). Но его базисной переменной *всегда* является переменная Z . Это означает, что новые значения оценок свободных переменных и число Z_0 можно пересчитывать, как и числа x_{ij} , по формулам (3.19).

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{rj}}{x_{rs}} \Delta_s; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3.8. Анализ значений целевой функции Z , выраженной через свободные переменные. Признак неограниченности целевой функции в допустимой области

Рассмотрим ЗЛП из предыдущего примера. Выразим базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные.

$$Z = -6 + 9x_1 + 4x_2 - 5x_3; \quad (3.28)$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - x_2 + 2x_3; \quad x_5 = 6 - x_1 + 3x_2 - x_3. \quad (3.29)$$

Свободные переменные x_1, x_2, x_3 удобны тем, что могут принимать любые значения, кроме тех, которые нарушают условие неотрицательности переменных. Положим, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Тогда $x_4 = 4 > 0$; $x_5 = 6 > 0$; $Z = -6$. На ОР $\bar{x} = (0, 0, 0, 4, 6)$ целевая функция Z равна -6 . Можно ли увеличить значение Z ?

Можно, если оставить, например, x_1 и x_3 равными нулю, а переменную x_2 сделать больше нуля. Тогда целевая функция возрастет, ведь $Z = -6 + x_2$.

Можно ли беспрестанно увеличивать значения x_2 ? Нет, ведь нужно следить за тем, чтобы переменные x_4 и x_5 оставались неотрицательными. Так как $x_1 = x_3 = 0$, можно записать: $x_4 = 4 - x_2$; $x_5 = 6 + 3x_2$.

Переменная x_4 остается неотрицательной, пока верно неравенство $x_2 \leq 4$.

Когда $x_2 = 4$, то $x_4 = 0$, $x_5 = 18$, $Z = -6 + 4 \times 4 = 10$.

Целевая функция Z увеличилась на 16. Новое ОР – $\bar{x}_1 = (0; 4; 0; 0; 18)$. Теперь базисными переменными стали переменные x_2 и x_5 . В табл. 3.3 показаны соответствующие преобразования.

Таблица 3.3

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	-2	2	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I x_4 x_5	-3	2	I	-2	1	0	4
	1	1	-3	1	0	1	6
Z		-9	-4	5	0	0	-6
II x_2 x_5	-2	2	1	-2	1	0	4
	1	7	0	-5	3	1	18
Z		-1	0	-3	4	0	10

Базисные переменные x_2 , x_5 и целевая функция Z выражаются через свободные переменные x_1 , x_4 , x_3 так:

$$x_2 = 4 - 2x_1 + 2x_3 - x_4; \quad x_5 = 18 - 7x_1 + 5x_3 - 3x_4; \quad Z = 10 + x_1 + 3x_3 - 4x_4;$$

Можно ли продолжать увеличивать Z ? Оставим переменные x_1 и x_4 равными нулю. От переменной x_3 целевая функция и базисные переменные зависят так:

$$Z = 10 + 3x_3; \quad x_2 = 4 + 2x_3; \quad x_5 = 18 + 5x_3.$$

Если $x_3 \geq 0$, значения переменных x_2 , x_5 также больше нуля, а целевая функция Z неограниченно возрастает с возрастанием x_3 . Таким образом, $Z_{\max} = +\infty$, целевая функция не ограничена сверху в допустимой области.

Теперь можно легко сформулировать общий признак неограниченности целевой функции в допустимой области.

Если некоторая свободная переменная x_j такова, что $\Delta_j < 0$, а все коэффициенты $x_{ij} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, t$, то целевая функция Z не ограничена сверху в допустимой области, $Z_{\max} = +\infty$.

Действительно, полагая все свободные переменные, кроме x_j , равными 0, получаем, что $Z = Z_0 - (\Delta_j)x_j \Rightarrow Z = Z_0 + |\Delta_j|x_j$. Для любой базисной переменной x_i имеем: $x_i = x_{i0} - x_{ij}x_j \Rightarrow x_i = x_{i0} + |x_{ij}|x_j$. Если неограниченно увеличивать значения x_j , то значения Z также будут неограниченно возрастать, а все базисные переменные останутся положительными.

Аналогично формулируется признак неограниченности целевой функции снизу.

$Z_{\min} = -\infty$, если существует такая свободная переменная x_j , что $\Delta_j > 0$, а все коэффициенты $x_{ij} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

В этом случае $Z = Z_0 - |\Delta_j|x_j$, поэтому с возрастанием значения x_j целевая функция убывает.

Попытаемся найти минимум целевой функции Z . Для чего возвратимся к выражениям (3.28), (3.29) и к части I табл. 3.3.

Из (3.28) следует, что Z можно сделать меньше числа -6 , если оставить переменные x_1, x_2 равными 0, а переменную x_3 сделать больше 0. Увеличивать переменную x_3 беспрестанно нельзя. Если $x_1 = x_2 = 0$, то базисные переменные выражаются через x_3 так: $x_4 = 4 + 2x_3$; $x_5 = 6 - 5x_3$, поэтому максимально возможное значение $x_3 = 6$, тогда переменная x_5 обратится в 0. Это значит, что получено новое ОР – $\bar{x}_2 = (0; 0; 6; 16; 0)$, на котором $Z = -6 - 5x_3 = -6 - 30 = -36$. Базисные переменные этого ОР – x_3, x_4 ; свободные переменные – x_1, x_2, x_5 (табл. 3.4).

Целевая функция и базисные переменные x_3, x_4 выражаются через свободные переменные так:

$$Z = -36 + 14x_1 - 11x_2 + 5x_5;$$

$$x_3 = 6 - x_1 + 3x_2 - x_5;$$

$$x_4 = 16 - 4x_1 + 5x_2 - 2x_5.$$

Таблица 3.4

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	-2	2	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I x_4 x_5	-3	2	1	-2	1	0	4
	1	1	-3	1	0	1	6

Z		-9	-4	5	0	0	-6
II	x_4	-3	4	-5	0	1	16
	x_3	1	1	-3	1	0	6
Z		-14	11	0	0	-5	-36

Теперь видно, что наша целевая функция и снизу неограничена в допустимой области, $Z_{\min} = -\infty$. Положив $x_1 = x_5 = 0$ и неограниченно увеличивая x_2 , мы будем неограниченно уменьшать значения Z , а базисные переменные x_3, x_4 останутся положительными.

3.9. Анализ значений целевой функции Z , выраженной через свободные переменные. Признак оптимальности опорного решения

Рассмотрим следующую ЗЛП:

$$Z = -3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \max(\min); \quad (3.30)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6;$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2; \quad (3.31)$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Система (3.31) такова, что x_1 – базисная переменная первого уравнения, x_5 – второго. Соответствующее ОР – вектор $\bar{x} = (6; 0; 0; 0; 2)$, целевая функция на нем равна $Z(\bar{x}) = -3 \times 6 - 2 \times 2 = -22$.

Выразим целевую функцию и базисные переменные через свободные переменные.

$$Z_0 = -3 \times 6 - 2 \times 2 = -22;$$

$$\Delta_2 = -3 \times 2 + (-2) \times 1 - (-3) = -5;$$

$$\Delta_3 = -3 \times (-1) + (-2) \times 2 - 1 = -2;$$

$$\Delta_4 = -3 \times 3 + (-2) \times (-1) - 1 = -8.$$

Тогда

$$Z = Z_0 - (\Delta_2)x_2 - (\Delta_3)x_3 - (\Delta_4)x_4 = -22 + 5x_1 + 2x_3 + 8x_4; \quad (3.32)$$

$$x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 - 3x_4; \quad x_5 = 2 - x_2 - 2x_3 + x_4. \quad (3.33)$$

Можно ли подобрать такое допустимое решение системы (3.31), на котором целевая функция была бы меньше -22 ? Нельзя! И это сразу видно из (3.32). Когда все свободные переменные равны нулю, $Z = -22$. Но стоит хотя бы одной свободной переменной стать больше нуля, как Z сразу увеличится, ведь в (3.32.) все свободные переменные входят с

положительными коэффициентами. Итак, $Z_{\min} = -22$, достигается минимальное значение целевой функции на ОР $\bar{x} = (6; 0; 0; 0; 2)$.

Теперь можно сформулировать достаточный признак достижения целевой функцией минимума на данном ОР.

Если оценки всех свободных переменных неположительны, $\Delta_j \leq 0$, то минимум целевой функции равен числу Z_0 (все свободные переменные равны нулю).

Параллельный признак максимума целевой функции, очевидно, такой.

Если оценки всех свободных переменных неотрицательны, $\Delta_j \geq 0$, то максимум целевой функции равен числу Z_0 (все свободные переменные равны нулю).

Соответствующие ОР являются оптимальными.

Попробуем найти максимум целевой функции (3.30). Из (3.32) следует, что целевую функцию Z можно увеличить, если одну из переменных сделать больше нуля. Пусть, например, переменная x_2 станет больше нуля, а переменные x_3, x_4 останутся равными нулю. Тогда $x_1 = 6 - 2x_2$; $x_5 = 2 - x_2$.

Переменную x_2 можно увеличивать до тех пор, пока обе переменные x_1, x_5 неотрицательны. Переменная x_1 станет равной нулю, когда $x_2 = 3$; переменная x_5 станет равной нулю, когда $x_2 = 2$. Значит, x_2 не может быть больше 2. При $x_2 = 2$ получается новое ОР: $\bar{x}_1 = (2; 2; 0; 0; 0)$.

Проделаем все вычисления в табл. 3.5, чтобы получить новую стандартную форму системы ограничений и новые оценки свободных переменных. Во втором уравнении базисная переменная x_5 заменяется на переменную x_2 .

$$Z = -12 - 9x_3 + 13x_4 - 5x_5; \quad (3.34)$$

$$x_1 = 2 + 5x_3 - 5x_4 + 2x_5; \quad x_2 = 2 - 2x_3 + x_4 - x_5. \quad (3.35)$$

Выведем общее правило, позволяющее определить, какую из базисных переменных должна заменить выбранная свободная переменная. Как мы только что видели, это должна быть та базисная переменная, которая первой обращается в 0 при увеличении свободной переменной.

Таблица 3.5

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	-3	-3	1	1	-2	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-3	1	2	-1	3	0	6

x_5	-2	0	I	2	-1	1	2
Z		0	-5	-2	-8	0	-22
II x_1 x_2	-3	1	0	-5	5	-2	2
	-3	0	1	2	-1	1	2
Z		0	0	9	-13	5	-12

Пусть x_j – свободная переменная, которую нужно сделать больше нуля, чтобы увеличить (уменьшить) целевую функцию. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ – базисные переменные, которые зависят от x_j (в предположении, что все остальные свободные переменные равны нулю) следующим образом:

$$x_1 = x_{10} - x_{1j}x_j;$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$x_i = x_{i0} - x_{ij}x_j;$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$x_m = x_{m0} - x_{mj}x_j.$$

Если число $x_{ij} \leq 0$, то с ростом значения x_j значение x_i только возрастает. Значит, нужно обратить внимание только на те базисные переменные, для которых $x_{ij} > 0$.

Из уравнения $x_i = x_{i0} - x_{ij}x_j$ следует, что x_i обращается в 0, когда

$$x_j = \frac{x_{i0}}{x_{ij}}. \quad (3.36)$$

Следовательно, та переменная x_i обращается в 0 первой, для которой отношение (3.36) минимально. В только что рассмотренном примере $\min(6/2; 2/1) = 2$, достигался он на отношении, соответствующем базисной переменной x_5 (базисной переменной второго уравнения). Поэтому переменная x_2 сменила во втором уравнении в качестве базисной переменную x_5 .

Базисная переменная заменяется в том уравнении, для которого достигается минимум отношения x_{i0} / x_{ij} , $x_{ij} > 0$.

Продолжим увеличение значений функции Z . Для этого нужно оставить равными нулю переменные x_3, x_5 , а переменную x_4 сделать больше нуля.

Так как $x_1 = 2 - 5x_4$; $x_2 = 2 + x_4$, то увеличивать x_4 можно до тех пор, пока x_1 не обратится в 0, т.е. до числа 0,4. Тогда $Z = -12 + 13 \times 0,4 = -6,8$.
Очередное ОР: $\bar{x}_2 = (0; 2,4; 0; 0,4; 0)$.

Итак, целевая функция Z увеличивается, если становится больше нуля свободная переменная с отрицательной оценкой. Целевая функция Z уменьшается, если становится больше нуля свободная переменная с положительной оценкой.

Обратимся к табл. 3.6. Не будем больше явно выписывать выражения для Z , x_2 , x_4 – они легко определяются по таблице.

Продолжим увеличение Z . Пусть переменная x_3 ($\Delta_3 = -5 < 0$) станет больше нуля, т.е. превратится в базисную переменную.

Таблица 3.6

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	–3	–3	1	1	–2	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I	x_1	–3	1 (0,2)	0 (0)	–5 (–1)	5 (1)	–2 (–0,4)
	x_2	–3	0	1	2	–1	1
Z			0	0	9	–13	5
II	x_4	1	0,2	0	–1	1	–0,4
	x_2	–3	0,2	1	1	0	0,6
Z			2,6	0	–5	0	–0,2

Так как $x_{13} = -1 < 0$, а $x_{23} = 1 > 0$, то переменная x_4 будет только возрастать при увеличении x_3 , а переменная x_2 будет уменьшаться. Она уменьшится до нуля, когда x_3 станет равной $2,4/1 = 2,4$. На новом ОР $\bar{x}_3 = (0; 0; 2,4; 2,8; 0)$ целевая функция Z равна $-6,8 + 5 \times 2,4 = 5,2$.

Перейдем к табл. 3.7, где записана стандартная форма системы уравнений при ОР $\bar{x}_3$, когда базисными являются переменные x_4 (в первом уравнении) и x_3 (во втором уравнении).

Оценки всех свободных переменных положительные, $Z = 5,2 - 3,6x_1 - 5x_2 - 2,8x_5$. Целевую функцию нельзя более увеличить. Оптимальные значения переменных: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2,4$; $x_4 = 2,8$; $x_5 = 0$; $Z_{\text{max}} = 5,2$.

Таблица 3.7

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	–3	–3	1	1	–2	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

x_4	1	0,4	1	0	1	0,2	2,8
x_3	1	0,2	1	1	0	0,6	2,4
Z		3,6	5	0	0	2,8	5,2

3.10. Теорема о достижимости оптимального значения целевой функции ЗЛП на опорном решении

Для определенности будем полагать, что ищется максимум целевой функции. Данная теорема – ключевая. Она позволяет свести поиск оптимального решения ЗЛП среди *бесконечного* множества допустимых решений (дело достаточно безнадёжное) к перебору *конечного* множества опорных решений.

Рассмотрим *невыврожденное* ОР, для которого не выполняются ни признак неограниченности целевой функции, ни признак оптимальности. Это значит, что существует такая свободная переменная x_j , что $\Delta_j < 0$ и что есть хотя бы одна базисная переменная x_i , такая, что $x_{ij} > 0$. Невыврожденность ОР означает, что все числа $x_{i0} > 0$. Положим равными нулю все свободные переменные, кроме переменной x_j . Тогда

$$Z = Z_0 - (\Delta_j)x_j.$$

Целевую функцию можно сделать больше числа Z_0 , если положить $x_j > 0$. Увеличивать целевую функцию безгранично нельзя, ведь с ростом x_j некоторые из базисных переменных уменьшаются. Мы показали, что первой обратится в 0 та базисная переменная x_i , для которой минимально отношение x_{i0} / x_{ij} , $x_{ij} > 0$. Новое значение переменной x_j равно числу x_{i0} / x_{ij} , а новое значение Z равно числу $Z_0 + \left| \Delta_j \right| \frac{x_{i0}}{x_{ij}} > Z_0$, так как $x_{ij} > 0$.

Получено новое ОР, которое отличается от предыдущего тем, что место базисной переменной x_i заняла переменная x_j , а значение Z на новом ОР **больше**, чем на предыдущем. Значит, от **невыврожденного неоптимального ОР** можно перейти к **другому ОР**, на котором целевая функция **возрастает**.

Следовательно, для невиврожденного ОР признак оптимальности является не только достаточным, но и необходимым.

Рассмотрим произвольную ЗЛП такую, что $Z_{\max} \neq \infty$. Расположим ее опорные решения в порядке возрастания целевой функции. Если ОР с максимальным значением целевой функции невиврожденное, то оно

обязательно *оптимально*, иначе получается противоречие с только что доказанным свойством невырожденных неоптимальных ОР. Тогда все оценки свободных переменных этого ОР *обязательно неотрицательны*.

В случае вырожденности ОР признак оптимальности не является необходимым. Приведем пример, подтверждающий это утверждение. Рассмотрим такую ЗЛП.

$$Z = 5 + 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_3 = -x_1 - 4x_2; \quad x_4 = 1 + x_1 - 3x_2; \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

Для ОР $\bar{x} = (0; 0; 0; 1)$ признак оптимальности не выполняется, так как $\Delta_1 = -2 < 0$. Целевую функцию можно было бы увеличить, если можно было бы увеличить переменную x_1 . Но как только x_1 станет больше 0, переменная x_3 станет меньше 0. Поэтому $Z_{\max} = 5$. Если поменять в первом уравнении базисные переменные, заменить x_3 переменной x_1 , то система ограничений и целевая функция примут вид:

$$Z = 5 - 2x_3 - 11x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 = -x_3 - 4x_2; \quad x_4 = 1 - 7x_2 - x_3; \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

Теперь все оценки свободных переменных положительны, поэтому ясно, что на векторе $\bar{x}_1 = (0; 0; 0; 1)$ целевая функция достигает максимума.

Для дальнейшего нам потребуется знать, как меняется ЗЛП, если изменить ее правые части. Рассмотрим пример.

Пример. ЗЛП представлена в табл. 3.8.

Чтобы увеличить целевую функцию, которая на ОР $\bar{x} = (0; 4; 0; 2; 2)$ равна нулю, переведем в базисные переменную x_1 с отрицательной оценкой $\Delta_1 = -4$. Так как $\min(\frac{x_{10}}{x_{11}}; \frac{x_{20}}{x_{21}}; \frac{x_{30}}{x_{31}}) = \min(\frac{4}{2}; \frac{2}{1}; \frac{2}{1}) = 2$, причем

$\frac{x_{10}}{x_{11}} = \frac{x_{20}}{x_{21}} = \frac{x_{30}}{x_{31}}$, то заменять базисную переменную можно в любом

уравнении. Пусть переменная x_5 станет свободной (табл. 3.9, ч. I).

Таблица 3.8

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	2	1	3	0	0	4
x_4	-3	1	0	2	1	0	2
x_5	1	1	0	1	0	1	2
Z		-4	0	-7	0	0	0

Целевая функция увеличилась на 8. ОР $\bar{x}_1 = (2; 0; 0; 0; 0)$ – вырожденное, две базисные переменные – x_2 и x_4 – равны нулю. Превратим это ОР в невырожденное, заменив нули числом ε , $\varepsilon > 0$. Положим, что число ε может быть сколь угодно малым. Тогда $\bar{x}'_1 = (2; \varepsilon; 0; \varepsilon; 0)$ и это ОР уже невырожденное (табл. 3.9, ч. II).

Вернемся назад к табл. 3.8 и выясним, какой она должна быть, чтобы из нее получилась табл. 3.9, ч. II.

Таблица 3.9

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I x_2 x_4 x_1	1	0	1	1	0	-2	0
	-3	0	0	1	1	-1	0
	4	1	0	1	0	1	2
Z		0	0	-3	0	4	8
II x_2 x_4 x_1	1	0	1	I	0	-2	ε
	-3	0	0	1	1	-1	ε
	4	1	0	1	0	1	2
Z		0	0	-3	0	4	$8 - 2\varepsilon$

Базисная переменная третьего уравнения – это снова переменная x_5 . Изменение правых частей влияет только на правые части (следует из формул пересчета (3.20), включая оценку Z_0). Запишем формулы пересчета правых частей.

$$x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rs}} x_{is}, \quad i \neq r; \quad x'_{r0} = \frac{x_{r0}}{x_{rs}}.$$

Если числа x_{i0} линейно зависят от ε , то новые правые части также линейно зависят от ε . В нашем случае $x'_{10} = 4 + \varepsilon$; $x'_{20} = 2 + \varepsilon$; $x'_{30} = 2$; $Z'_0 = -2\varepsilon$ (табл. 3.10).

Если теперь переменную x_1 перевести в базисные, уравнение, в котором заменится базисная переменная, определится однозначно: $\min((4 + \varepsilon)/2; (2 + \varepsilon)/1; 2/1) = 2$ и достигается на отношении x_{30} / x_{31} .

Таблица 3.10

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	2	1	3	0	0	$4 + \varepsilon$
x_4	-3	1	0	2	1	0	$2 + \varepsilon$

x_5	1	1	0	1	0	1	2
Z		-4	0	-7	0	0	-2ε

ОР $\bar{x} = (0; 4; 0; 2; 2)$ превратилось в ОР $\bar{x}' = (0; 4 + \varepsilon; 0; 2 + \varepsilon; 2)$. Так как ε может быть сколь угодно малым, все значения базисных переменных остаются положительными, даже если ε входит в выражение для правых частей со знаком минус.

Продолжим процесс увеличения целевой функции, ведь переменная x_3 имеет отрицательную оценку (см. табл. 3.9, ч. II).

$$\min\left(\frac{x_{10}}{x_{13}}; \frac{x_{20}}{x_{23}}; \frac{x_{30}}{x_{33}}\right) = \min\left(\frac{\varepsilon}{1}; \frac{\varepsilon}{1}; \frac{2}{1}\right) = \varepsilon.$$

Заменим базисную переменную в первом уравнении. Переменная x_3 становится базисной переменной первого уравнения, Переменная x_2 становится свободной (табл. 3.11).

Целевая функция возросла на величину 3ε . Ее увеличение можно продолжить, так как $\Delta_5 = -2 < 0$. Но ОР $\bar{x}_2 = (2 - \varepsilon; 0; \varepsilon; 0; 0)$ – вырожденное. Заменим нулевую правую часть второго уравнения (значение базисной переменной x_4) числом $\varepsilon^2 > 0$. Тогда ОР $\bar{x}'_2 = (2 - \varepsilon; 0; \varepsilon; \varepsilon^2; 0)$ будет уже невырожденным (табл. 3.12, ч. I).

Вследствие подобной замены правые части становятся полиномами второй степени от параметра ε . Вследствие бесконечной малости ε , справедливо неравенство $k\varepsilon^2 < \varepsilon$ для всякого k , поэтому дополнительные слагаемые, содержащие член ε^2 , на знак изменившихся правых частей влиять не будут. Покажем, как изменяются ОР $\bar{x}'$, $\bar{x}'_1$ (табл. 3.12, ч. II и ч. III).

Таблица 3.11

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	0	1	1	0	-2	ε
x_4	-3	0	-1	0	1	1	0
x_1	4	1	-1	0	0	3	$2 - \varepsilon$
Z		0	3	0	0	-2	$8 + \varepsilon$

$$\bar{x}'' = (0; 4 + \varepsilon; 0; 2 + \varepsilon + \varepsilon^2; 2); \quad \bar{x}''_1 = (2; \varepsilon; 0; \varepsilon + \varepsilon^2; 0).$$

Продолжим увеличение целевой функции (табл. 3.13). Свободная переменная x_5 сменяет базисную переменную x_4 во втором уравнении:

$\min(\varepsilon^2/1; 2/3 - \varepsilon) = \varepsilon^2$. Целевая функция возросла на число $2\varepsilon^2$. ОР $\bar{x}_3 = (2 - \varepsilon - 3\varepsilon^2; 0; \varepsilon + 2\varepsilon^2; 0; \varepsilon^2)$ – оптимально, так как все оценки свободных переменных положительны. Обратим ε в 0. ОР $(2, 0, 0, 0, 0)$ – это решение исходной задачи, которое мы уже рассматривали. Но тогда выбор базисных переменных был «неудачным» – не выполнялся признак оптимальности ОР. Теперь же, когда в качестве базисных выбраны переменные x_1, x_3, x_5 , оценки свободных переменных x_2, x_4 больше нуля, можно утверждать, что $Z_{\max} = 8$.

Таблица 3.12

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I	x_3	5	0	I	1	0	ε
	x_4	-3	0	-1	0	1	ε^2
	x_1	4	1	-1	0	3	$2 - \varepsilon$
Z		0	3	0	0	-2	$8 + \varepsilon - 3\varepsilon^2$
II	x_2	1	0	1	1	0	ε
	x_4	-3	0	0	1	1	$\varepsilon^2 + \varepsilon$
	x_1	4	1	0	1	0	I
Z		0	0	-3	0	4	$8 - 2\varepsilon - 3\varepsilon^2$
III	x_2	1	2	1	3	0	$4 + \varepsilon$
	x_4	-3	1	0	2	1	$2 + \varepsilon + \varepsilon^2$
	x_5	1	1	0	1	0	2
Z		-4	0	-7	0	0	$-2\varepsilon - 3\varepsilon^2$

Рассмотренный пример позволяет сформулировать общий способ избавления от вырожденности. Когда во время перебора опорных решений вырожденное ОР встретится первый раз, нужно заменить нулевые правые части числом ε и продолжить увеличение целевой функции. Если снова встретится вырожденное ОР, нужно заменить нули числом ε^2 и продолжать увеличивать целевую функцию. Если вырожденное ОР встретится вновь, нужно заменить нули числом ε^3 и т.д., тогда все просмотренные ОР будут невырожденными, а значения целевой функции будут монотонно возрастать. Ввиду конечности множества ОР (конечно число возможных наборов базисных переменных), обязательно найдется невырожденное ОР, для которого выполнится признак оптимальности – все оценки свободных переменных неотрицательны. Положив $\varepsilon = 0$,

получим ОР исходной задачи (быть может, вырожденное) с теми же самыми неотрицательными оценками – оптимальное решение данной ЗЛП.

Таблица 3.13

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	4	1	5	-3	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
I x_3 x_4 x_1	5	0	1	1	0	-2	ε
	-3	0	-1	0	1	1	ε^2
	4	1	-1	0	0	3	$2 - \varepsilon$
Z		0	3	0	0	-2	$8 + \varepsilon - 3\varepsilon^2$
II x_3 x_5 x_1	5	0	-1	1	2	0	$\varepsilon + 2\varepsilon^2$
	1	0	-1	0	1	1	ε^2
	4	1	2	0	-3	0	$2 - \varepsilon - 3\varepsilon^2$
Z		0	1	0	2	0	$8 + \varepsilon - \varepsilon^2$

Итак, среди ОР данной ЗЛП, имеющей решение, *всегда есть оптимальное*, с неотрицательными оценками свободных переменных.

Ясно, что все приведенные рассуждения остаются в силе, если искать минимум целевой функции ЗЛП.

3.11. Задачи

В задачах 1 – 4 нужно привести исходную ЗЛП к каноническому виду.

- $Z = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$;
 $-2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5$;
 $x_1 + 2x_3 = 8$;
 $x_1 - 2x_2 \geq 1$;
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
- $Z = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$;
 $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$;
 $x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9$;
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$;
 $x_1, x_2, \geq 0$.
- $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$;
 $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 6$;
 $-2x_1 + 4x_3 + x_4 \leq 4$; $x_2, x_5 \geq 0$.
- $Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \max$;
 $-3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 6$;
 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2$;

$$x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

5. Показать, как можно линейризовать следующую функцию:

$$Z = \max \left(\left| \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \right|, \dots, \left| \sum_{j=1}^n c_{mj} x_j \right| \right) \rightarrow \min.$$

В задачах 6 – 9 даны допустимые решения ЗЛП 1 – 4. Построить соответствующие допустимые решения канонических ЗЛП.

6. $x_1 = 4; x_2 = 1; x_3 = 2.$

7. $x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 4.$

8. $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = -3; x_5 = 0.$

9. $x_1 = -2; x_2 = 3; x_3 = 1; x_4 = 3; x_5 = 4.$

10. Показать, что если в некоторой ЗЛП на m переменных не наложено условие неотрицательности, то их можно заменить на $m + 1$ неотрицательных переменных.

11. Показать, что множество решений системы уравнений не меняется после описанных в параграфе 4.1 элементарных преобразований.

12. Все ОР данной ЗЛП невырожденные. Следует ли из этого факта единственность оптимального решения? Если да, то доказать; если нет, то привести контрпример.

13. Найти все ОР системы уравнений:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5;$$

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 = 2;$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

14. Дана система уравнений

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 5;$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_4 + x_6 = 8;$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 8;$$

$$-x_1 + x_3 + 2x_4 + x_8 = 0.$$

Какое ОР получится, если базисной станет переменная x_1 ? Переменная x_2 ? Переменная x_3 ? Переменная x_4 ?

15. ЗЛП задана в таблице.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Правые части
x_8	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12
x_3	0	2	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0
Z	0	-5	0	4	-1	-10	0	0	620

1. Составить математическую модель этой ЗЛП.
2. Как изменится целевая функция, если базисной станет переменная x_2 ; x_4 ; x_5 ; x_6 ; x_7 ?
3. Какая из переменных станет свободной в каждом из случаев пункта 2?

В задачах 16 – 19 требуется найти оптимальное решение ЗЛП.

16. $Z = -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$;

$$x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 ;$$

$$2x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 2 ;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0 .$$

17. $Z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12 ;$$

$$x_1 - 5x_2 - x_4 + x_5 = 12 ;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0 .$$

18. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$;

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1 ;$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

19. $Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$;

$$x_1 - 2x_6 = 1 ;$$

$$x_2 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 1$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 ;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 .$$

20. Доказать, что целевая функция данной ЗЛП не ограничена сверху на допустимом множестве. Указать допустимое решение задачи, на котором целевая функция равна 1 000 000.

$$Z = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 ;$$

$$-2x_2 + x_3 + x_4 = 2 ;$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0 .$$

21. Доказать, что целевая функция данной ЗЛП не ограничена снизу на допустимом множестве. Указать допустимое решение задачи, на котором целевая функция равна $-1\,000\,000$.

$$Z = x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min ;$$

$$-2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 ;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 ;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0 .$$

4. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП

4.1. Описание симплекс-метода

Симплекс-метод изобрел американский математик Дж. Данциг. Метод основан на доказанных в предыдущей главе свойствах опорных решений и состоит из следующих шагов (предполагается, что исходная ЗЛП приведена к каноническому виду).

Шаг 1. Получить исходное ОР данной задачи.

Шаг 2. Проверить, выполняется ли для данного ОР признак оптимальности. Если это так, оптимальное решение получено, конец. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Проверить, выполняется ли для данного ОР признак неограниченности целевой функции в допустимой области. Если это так, задача не имеет решения, конец. В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Если ищется максимум целевой функции, выбрать любую свободную переменную x_s с отрицательной оценкой (например, переменную с наименьшим номером); если ищется минимум целевой функции, выбрать любую свободную переменную x_s с положительной оценкой (например, переменную с наименьшим номером). Выбранная свободная переменная становится базисной.

Шаг 5. Выбрать уравнение, в котором заменяется базисная переменная. Номер r этого уравнения определяется по правилу

$$\text{минимума: } \frac{x_{r0}}{x_{rs}} = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{is}}\right), \quad x_{is} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m .$$

Если минимум достигается сразу для нескольких номеров уравнений, выбрать любое из них.

Шаг 6. Перейти к новому ОР, используя формулы (3.20).

Шаг 7. Перейти к шагу 2.

Решение оформляется в так называемых **симплекс-таблицах**. Построенные ранее табл. 3.1 – 3.13 являются симплекс-таблицами.

Так как число ОР конечно, через конечное число шагов алгоритм закончит работу либо на шаге 2, либо на шаге 3.

Чтобы описанный алгоритм заработал, нужно научиться получать исходное ОР данной ЗЛП. Если система ограничений приведена к каноническому виду, получение стандартной формы системы уравнений – задача того же порядка сложности, что и нахождение оптимального решения в соответствии с шагами 2 – 7.

Описанию способа получения исходного ОР посвящен следующий параграф.

4.2. Получение исходного ОР.

Метод искусственного базиса

Пусть система уравнений ЗЛП приведена к каноническому виду

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1')$$

Но система ограничений (4.1) не записана в стандартной форме, в уравнениях (4.1) не выделены базисные переменные.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$Z' = y_1 + y_2 + \dots + y_m \rightarrow \min; \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m &= b_m; \\ x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.3')$$

В каждое из уравнений системы (4.1) добавлена *искусственная базисная переменная*. ЗЛП (4.2) – (4.3') можно начать решать симплекс-методом. Относительно решения задачи (4.2) – (4.3') можно сказать следующее.

1. Целевая функция Z' ограничена снизу числом 0, $Z' \geq 0$, ведь по условию $y_i \geq 0, i=1, \dots, m$. Следовательно, случай $Z'_{\min} = -\infty$ невозможен, задача (4.2) – (4.3') *всегда имеет решение*.

2. Если $Z'_{\min} = Z_0 > 0$, то система (4.1) *не имеет ни одного решения*, уравнения (4.1) несовместны: если $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – допустимое решение системы (4.1), то $\bar{y} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$ – допустимое решение системы (4.3). Но $Z(\bar{y}) = 0$, противоречие с предположением $Z'_{\min} = Z_0 > 0$.

3. Если $Z'_{\min} = 0$, то все искусственные переменные равны 0. Следовательно, в оптимальном ОР задачи (4.2) – (4.3') базисными являются переменные системы (4.1). Тогда искусственные переменные можно просто отбросить и перейти к системе (4.1), записанной в стандартной форме.

Описанный метод получения исходного ОР данной системы уравнений называется **методом искусственного базиса**.

Пример. Решить ЗЛП.

$$Z = x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 8 ;$$

$$4x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 ;$$

$$x_1, x_4 \geq 0 .$$

В этом примере базисная переменная есть только у первого уравнения. Введем во второе уравнение искусственную базисную переменную y_1 и решим следующую ЗЛП:

$$Z' = y_1 \rightarrow \min ;$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 8 ;$$

$$4x_2 + x_3 - 2x_4 + y_1 = 3 ;$$

$$x_1, x_4 \geq 0, y_1 \geq 0 .$$

Решение задачи приведено в табл. 4.1. Чтобы уменьшить целевую функцию Z' , нужно сделать базисной переменную x_3 с положительной оценкой $\Delta_3 = 1$. Так как $\min(\frac{8}{3}; \frac{3}{1}) = 3$, то базисная переменная заменяется во втором уравнении. Искусственная переменная y_1 становится свободной.

В части II табл. 4.1 записана система уравнений

$$x_1 - 7x_2 + x_4 - y_1 = 8 ;$$

$$4x_2 + x_3 - 2x_4 + y_1 = 3.$$

Если отбросить столбец с переменной y_1 , в таблице останется исходная система уравнений, приведенная к стандартному виду:

$$x_1 - 7x_2 + x_4 = 8;$$

$$4x_2 + x_3 - 2x_4 = 3.$$

Теперь можно решить исходную ЗЛП (табл. 4.2). Конечно, исходная система уравнений настолько проста, что исключить переменную x_3 из первого уравнения и так не составляло никакого труда. Но мы разбираем элементарный учебный пример.

Таблица 4.1

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	0	0	0	0	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
I x_1 y_2	0	1	-3	1	-1	0	8
	1	0	4	I	-2	1	3
Z'		0	4	1	-2	0	3
II x_1 x_3	0	1	-7	0	1	-1	5
	0	0	4	1	-2	1	3
Z'		0	0	0	0	0	0

Таблица 4.2

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	1	-2	-1	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
I x_1 x_3	1	1	-7	0	I	5
	-1	0	4	1	-2	3
Z		0	-1	0	-2	2
II x_4 x_3	1	1	<u>-7</u>	0	1	5
	-1	2	<u>-10</u>	1	0	13
Z		2	<u>-15</u>	0	0	12

Теперь видно, что целевая функция Z не ограничена сверху в допустимой области, $Z_{\max} = +\infty$.

4.3. Об альтернативных оптимальных решениях ЗЛП

Решая ЗЛП графически, мы видели, что оптимальное решение не обязательно единственно. Экстремум целевой функции может достигаться во всех точках некоторого отрезка, тогда оптимальных решений

бесконечно много. Обобщим этот результат на случай задачи с n переменными.

Если оценка некоторой свободной переменной x_s равна нулю, то переход к ОР, в котором эта переменная станет базисной, не приведет к изменению значения целевой функции на новом ОР, ведь

$$Z'_0 = Z_0 - \frac{x_{ro}}{x_{rs}} \Delta_s = Z_0, \text{ если } \Delta_s = 0.$$

Значит, если оптимальное ОР таково, что оценки некоторых свободных переменных равны нулю, то все ОР, полученные из оптимального ОР заменой некоторой базисной переменной на свободную переменную с нулевой оценкой, тоже будут оптимальными.

Пример. В табл. 4.3 стоит оптимальное ОР, на котором целевая функция достигает своего максимума, – вектор $\bar{x}_1 = (2; 6; 0; 0; 0, 0)$;

$$Z_{\max} = 22.$$

Таблица 4.3

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	2	3	8	5	4	5	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	2	1	0	1	1	2	3	2
x_2	3	0	1	2	1	1	1	6
Z		0	0	0	0	3	4	22

Перейдем к новому ОР, заменив в первом уравнении базисную переменную x_1 на переменную x_3 (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	2	3	8	4	4	4	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	8	1	0	1	1	2	3	2
x_2	3	–2	1	0	–1	–3	–4	2
Z		0	0	0	0	3	4	22

Оценки переменных и значение целевой функции, конечно, не изменились. ОР $\bar{x}_2 = (0; 2; 2; 0; 0, 0)$ также оптимально.

Если теперь в первом уравнении заменить базисную переменную x_3 переменной x_4 , получится еще одно оптимальное ОР – вектор $\bar{x}_3 = (0; 4; 0; 2; 0, 0)$.

Пусть некоторая ЗЛП имеет l оптимальных опорных решений:

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$. Докажем, что любой вектор $\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_l \bar{x}_l = \sum_{i=1}^l \alpha_i \bar{x}_i$, где

$\alpha_1, \dots, \alpha_l \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_l = 1$, является допустимым и оптимальным решением этой ЗЛП.

Вектор $\bar{x}$ называется **выпуклой линейной комбинацией** векторов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$.

Если $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$ – оптимальные решения, то они одновременно допустимы: $A\bar{x}_1 = A\bar{x}_2 = \dots = A\bar{x}_l = \bar{b}_0$. Тогда

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= A(\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_l\bar{x}_l) = \alpha_1 A\bar{x}_1 + \dots + \alpha_l A\bar{x}_l = \alpha_1\bar{b}_0 + \dots + \alpha_l\bar{b}_0 = \\ &= \bar{b}_0(\alpha_1 + \dots + \alpha_l) = \bar{b}_0. \end{aligned}$$

Кроме того, $\alpha_i\bar{x}_i \geq \bar{0}$ в силу условия $\alpha_1, \dots, \alpha_l \geq 0$. Вектор $\bar{x}$ – действительно допустимое решение. Далее, если $Z_{\max} = Z(\bar{x}_1) = \dots = Z(\bar{x}_l) = Z_0$, то $Z(\bar{x}) = Z(\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_l\bar{x}_l) = \alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \dots + \alpha_l Z(\bar{x}_l) = \alpha_1 Z_0 + \dots + \alpha_l Z_0 = Z_0(\alpha_1 + \dots + \alpha_l) = Z_0$.

Здесь было использовано свойство линейности целевой функции Z .

Применительно к рассматриваемому примеру оптимальным решением задачи является всякий вектор $\bar{x} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$.

Пусть, например, $\alpha_1 = 0,25; \alpha_2 = 0,5; \alpha_3 = 0,25$. Этому набору значений коэффициентов линейной комбинации соответствует оптимальное решение задачи с такими значениями переменных (конечно, уже не опорное):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,25 \times 2 + 0,5 \times 0 + 0,25 \times 0 = 0,5; \quad x_2 = 0,25 \times 6 + 0,5 \times 2 + 0,25 \times 4 = 3,5; \\ x_3 &= 0,25 \times 0 + 0,5 \times 2 + 0,25 \times 0 = 1; \quad x_4 = 0,25 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,25 \times 2 = 0,5; \\ x_5 &= 0,25 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,25 \times 0 = 0; \quad x_6 = 0,25 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,25 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Понятие об альтернативных оптимальных решениях может оказаться полезным при анализе решений практических задач.

4.4. Об анализе на чувствительность

Часто важно знать не только само оптимальное решение ЗЛП, но и как это решение изменится, если изменятся исходные данные задачи. Покажем, как, располагая симплекс-таблицей с оптимальным решением, понять, что произойдет с оптимальным решением в случае изменения правых частей системы ограничений и коэффициентов целевой функции.

Пример. Для изготовления изделий A, B, C требуется сырье трех видов (I, II, III). Запасы сырья составляют 360, 192, 180 единиц соответственно.

Для изготовления одного изделия A требуется 18 ед. сырья I, 6 ед. сырья II, 5 ед. сырья III. На одно изделие B затрачивается 15 ед. сырья I, 4 ед. сырья II, 3 ед. сырья III. Затраты сырья на изделие C : 12 ед. сырья I, 8 ед. сырья II, 3 ед. сырья III.

Стоимость изделий – 9, 10, 16 денежных единиц соответственно. Требуется максимизировать выпуск изделий A , B , C в стоимостном выражении.

Математическая модель данной задачи такова:

$$Z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max;$$

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360; \quad 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180; \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

где x_1, x_2, x_3 – неизвестные, обозначающие количество изделий A, B, C .

Построим каноническую модель.

$$Z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max;$$

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360;$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

Решим данную ЗЛП симплекс-методом. Покажем только первую и последнюю симплекс-таблицы (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	9	10	16	0	0	0	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
I	x_4	0	18	15	12	1	0	360
	x_5	0	16	4	8	0	1	192
	x_6	0	5	3	3	0	1	180
Z		-9	-10	-16	0	0	0	0
II	x_2	10	1	1	0	1/9	-1/6	8
	x_3	16	1/4	0	1	-1/18	5/24	20
	x_6	0	5/4	0	0	-1/6	-1/8	96
Z		5	0	0	2/9	5/3	0	400

Оптимальное решение: нужно изготовить 8 ед. изделия B и 20 ед. изделия C , $Z_{\max} = 400$.

Если рассматривать переменные x_4, x_5, x_6 как неиспользованные запасы сырья I, II, III соответственно, то из оптимального решения следует,

что запасы сырья I и II полностью израсходованы, а сырья III остается 96 единиц.

Выясним, например, в каких пределах может изменяться запас сырья I, чтобы оптимальное решение осталось прежним. Обозначим изменение запаса сырья I через Δ и запишем систему ограничений в виде:

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360 + \Delta;$$

$$6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192 + 0 \times \Delta;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 + 0 \times \Delta.$$

Параметр Δ присутствует только в правой части системы ограничений, поэтому при переходе от одной симплекс-таблицы к другой в сравнении с первоначальным вариантом меняться будут только столбцы правых частей. Правые части превратятся в линейные функции от Δ . Коэффициенты a и b линейной функции $b + a\Delta$ при переходе от одной симплекс-таблицы к другой пересчитываются независимо друг от друга, поэтому столбец правых частей в последней симплекс-таблице примет вид $8 + a_1\Delta$; $20 + a_2\Delta$; $96 + a_3\Delta$ (столбец записан в виде строки).

Числа a_1 , a_2 , a_3 на самом деле известны. Действительно, в первой симплекс-таблице столбец коэффициентов при Δ , записанный как строка, таков: (1, 0, 0). Он совпадает со столбцом коэффициентов базисной переменной первого уравнения (в данном случае – это переменная x_4). Формулы пересчета одинаковы для всех элементов симплекс-таблицы. В любой из них коэффициенты при Δ равны соответствующим элементам столбца для переменной x_4 . В частности, в оптимальной для исходной задачи симплекс-таблице $a_1 = 1/9$; $a_2 = 1/18$; $a_3 = -1/6$. Сам столбец правых частей таков: $(8 + 1/9\Delta; 20 - 1/18\Delta; 96 - 1/6\Delta)$.

Чтобы найденное решение было оптимальным, достаточно его допустимость (все оценки свободных переменных положительны), т.е. правые части не могут быть меньше 0: $8 + 1/9\Delta \geq 0$; $20 - 1/18\Delta \geq 0$; $96 - 1/6\Delta \geq 0$. Отсюда $-72 \leq \Delta \leq 360$.

Выясним, что происходит, если меняется один из коэффициентов целевой функции. Пусть, например, коэффициент при x_2 равен $10 + \delta$. Для удобства еще раз покажем таблицу с оптимальным решением (табл. 4.6).

Пересчитаем оценки Δ_j по формуле $\Delta_j = (\bar{c}_{\text{баз}}, \bar{x}_j) - c_j$.

$$\Delta_1 = (10 + \delta) \times 1 + 16 \times 1/4 + 0 \times 5/4 - 9 = 5 + \delta;$$

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0;$$

$$\Delta_4 = (10 + \delta) \times 1/9 + 16 \times (-1/18) + 0 \times -(1/6) - 0 = 2/9 + (1/9)\delta;$$

$$\Delta_5 = (10 + \delta) \times (-1/6) + 16 \times 5/24 + 0 \times -(1/8) - 0 = 5/3 - (1/6)\delta.$$

Таблица 4.6

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	9	$10 + \delta$	16	0	0	0	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	$10 + \delta$	1	1	0	1/9	-1/6	0	8
	16	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	20
x_3	0	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	96
x_6		$5 + \delta$	0	0	$2/9 + (1/9)\delta$	$5/3 - (1/6)\delta$	0	$400 + 8\delta$
Z								

Так как δ входит только в выражение для c_2 ($c_2 = 10 + \delta$), коэффициенты при δ в оценках для свободных переменных и в формуле для Z_0 равны соответствующим коэффициентам первой строки (x_2 – базисная переменная первого уравнения).

Чтобы найденное решение оставалось оптимальным, все оценки должны быть по-прежнему неотрицательны, то есть должны выполняться неравенства: $5 + \delta \geq 0$; $2/9 + (1/9)\delta \geq 0$; $5/3 - (1/6)\delta \geq 0$. Отсюда $-2 \leq \delta \leq 10$, $Z_{\max} = 400 + 8\delta$.

Если разрешить меняться коэффициенту c_3 , то, учитывая, что в оптимальном решении переменная x_3 – базисная переменная второго уравнения, получаем такие значения оценок:

$$\Delta_1 = 5 + (1/4)\delta; \quad \Delta_4 = 2/9 - (1/18)\delta; \quad \Delta_6 = 5/3 + (5/24)\delta.$$

Чтобы все оценки оставались неотрицательными, должны выполняться неравенства: $5 + (1/4)\delta \geq 0$; $2/9 - (1/18)\delta \geq 0$; $5/3 + (5/24)\delta \geq 0$. Тогда $-8 \leq \delta \leq 4$, $Z_{\max} = 400 + 20\delta$.

Стоимость c_1 может быть любой, ведь x_1 – свободная переменная, в оптимальном решении $x_1 = 0$, оценки Δ_j не зависят от значения c_1 .

Выводы, построенные для приведенного примера, легко обобщить.

Далее без комментариев приводится решение ЗЛП, записанное в симплекс-таблицах (табл. 4.7 – 4.11).

Пример. Решить симплекс-методом:

$$Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \max ;$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 ; \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1 ;$$

$$2x_1 + x_2 = 2 ; \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0 .$$

Таблица 4.7

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	0	0	0	0	1	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_4	0	-1	1	1	1	0	0	2
y_1	1	1	-1	1	0	1	0	1
y_2	1	2	1	0	0	0	1	2
Z		3	0	1	0	0	0	3



Таблица 4.8

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	0	0	0	0	1	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_4	0	-2	2	0	1	-1	0	1
x_3	0	1	-1	1	0	1	0	1
y_2	1	2(1)	1(0,5)	0	0	0	1(0,5)	2(1)
Z		2	1	0	0	-1	0	2



Таблица 4.9

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	0	0	0	0	1	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_4	0	0	3	0	1	-1	1	3
x_3	0	0	-1,5	1	0	1	-0,5	0
x_1	0	1	0,5	0	0	0	0,5	1
Z		0	0	0	0	-1	-1	0



Таблица 4.10

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	2	-1	2	-2	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_4	-2	0	3(1)	0	1(1/3)	3(1)
x_3	2	0	-1,5	1	0	0
x_1	2	1	0,5	0	0	1
Z		0	-7	0	0	-4

⇓

Таблица 4.11

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	2	-1	2	-2	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	-1	0	1	0	1/3	1
x_3	2	0	0	1	1/2	3/2
x_1	2	1	0	0	-1/6	1/2
Z		0	0	0	7/3	3

Ответ: $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3/2$; $x_4 = 0$; $Z_{\max} = 3$.

4.5. Задачи

Решить симплекс-методом ЗЛП 1 – 5.

1. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$; 2. $Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$;

$$x_1 + x_4 + 6x_5 = 9;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0;$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2;$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9;$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

3. $Z = x_4 - x_5 \rightarrow \max$;

4. $Z = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$;

$$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0;$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2;$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0;$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9;$$

$$x_1 - x_4 + x_5 \geq 0;$$

$$x_1, \dots, x_3 \geq 0.$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 3;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

5. $Z = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$;

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = -3;$$

$$x_1 - 2x_4 = 2; \quad x_1 + x_4 \leq 3;$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

6. Показать, что следующая ЗЛП

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10; \quad x_1 + x_2 \leq 5; \quad x_1 \leq 1; \quad x_1, \dots, x_3 \geq 0$$

имеет, по крайней мере, три альтернативных оптимальных опорных решения. Описать все оптимальные решения этой задачи.

7. Показать, что следующая ЗЛП

$$Z = x_1 - x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 - x_2 \leq 2; \quad x_1 + x_2 \geq 3; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

имеет только одно оптимальное опорное решение, но бесконечно много допустимых оптимальных решений. Описать все оптимальные решения этой задачи.

8. Описать необходимое условие существования альтернативных оптимальных опорных решений.

9. Описать необходимое условие существования бесконечно большого числа альтернативных допустимых оптимальных решений при единственном оптимальном опорном решении.

10. Рассмотрим следующую ЗЛП

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12; \quad 4x_1 + x_2 \leq 8; \quad 4x_1 - x_2 \leq 8; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Оптимальному решению соответствует симплекс-таблица.

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	3	2	0	0	0	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	2	0	1	1/2	-1/2	0	2
x_1	3	1	0	-1/8	3/8	1	3/2
x_5	0	0	0	1	-2	0	4
Z		0	0	5/8	1/8	0	17/2

Определить:

1. Какие ограничения исходной задачи на оптимальном решении становятся строгими равенствами, какие удовлетворяются не строго?

2. В каком интервале может меняться значение каждой из правых частей, чтобы найденное ОР оставалось допустимым и, следовательно, оптимальным?

3. Каковы интервалы изменений коэффициентов c_1, c_2 целевой функции, при которых найденное решение остается оптимальным? Как при этом меняется значение целевой функции?

Те же вопросы повторяются в задачах 11 и 12, которые предварительно нужно решить.

11. $Z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5; \quad x_1 + x_2 \leq 4; \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

12. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430;$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460; \quad x_1 + 4x_2 \leq 420; \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

5. Основы теории двойственности

5.1. Определение пары двойственных задач

Рассмотрим пару задач линейного программирования, связанных между собой симметричными зависимостями. В частности, целевая функция одной задачи максимизируется, другой – минимизируется. Задачу, для которой требуется найти максимум целевой функции, назовем задачей (1), симметричную ей задачу назовем задачей (2). Условимся все ограничения неравенства задачи (1) записывать в виде $\leq$, все ограничения-неравенства-задачи (2) записывать в виде $\geq$. Целевую функцию задачи (1) обозначим буквой Z , целевую функцию задачи (2) – буквой W .

Задачи (1) и (2) называют **парой двойственных задач** линейного программирования (или просто **двойственной парой**), если выполнены следующие соотношения:

1. В задаче (1) n неизвестных и m ограничений (без учета условий неотрицательности), в задаче (2) m неизвестных и n ограничений (без учета условий неотрицательности). Ограничения задачи (1) находятся во взаимнооднозначном соответствии с переменными задачи (2). Переменные задачи (1) находятся во взаимнооднозначном соответствии с ограничениями задачи (2). Переменные задачи (1) обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$; переменные задачи (2) – через $y_1, y_2, \dots, y_m$.
2. Матрицы ограничений задач (1) и (2) взаимно транспонированы. Строка коэффициентов системы ограничений задачи (1) – это столбец коэффициентов системы ограничений задачи (2), и наоборот. Если a_{ij} – это коэффициенты при переменной x_j в i -ом ограничении задачи (1), $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$, то в задаче (2) коэффициент a_{ij} стоит при переменной y_i в j -ом ограничении.
3. Правые части системы ограничений задачи (1) – это коэффициенты целевой функции задачи (2); коэффициенты целевой функции задачи (1) – это правые части системы ограничений задачи (2). Если b_i – правая часть i -го ограничения задачи (1), то b_i – коэффициент при y_i в целевой функции задачи (2), $i=1, \dots, m$. Если c_j – коэффициент при x_j в целевой функции задачи (1), то c_j – правая часть j -го ограничения задачи (2), $j=1, \dots, n$.

4. Каждому ограничению-неравенству задачи (1) соответствует условие неотрицательности ассоциированной с этим ограничением переменной задачи (2). Каждому ограничению-равенству задачи (1) соответствует переменная задачи (2) без ограничений на знак. Наоборот, каждому ограничению-неравенству задачи (2) соответствует неотрицательная переменная задачи (1), каждому ограничению-равенству задачи (2) соответствует переменная задачи (1) произвольного знака.

Задача (1) называется **двойственной** задаче (2); задача (2) называется **двойственной** задаче (1).

Из определения двойственной пары следует, что отношение двойственности взаимное, задача, двойственная двойственной, совпадает с исходной задачей.

Пример 1. Построить задачу, двойственную следующей ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max ; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 6; & (y_1) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\leq 4; & (y_2) \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &\leq -5; & (y_3) \\ x_1, x_2, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} W &= 6y_1 + 4y_2 - 5y_3 \rightarrow \min ; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1; & (x_1) \\ -2y_1 + 3y_2 - 2y_3 &\geq -2; & (x_2) \\ y_1 - y_2 &= 1; & (x_3) \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= -1 & (x_4) \\ -2y_1 + y_2 &\geq 1; & (x_5) \\ y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Любую ЗЛП можно привести к каноническому виду. Доказывать теоремы двойственности удобно, когда одна из пары двойственных задач записана в канонической форме. Построим двойственную ей задачу.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max ;$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1; && (y_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2; && (y_2) \\ \dots\dots\dots &&& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. && (y_m) \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} W &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \rightarrow \min ; \\ a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_n &\geq c_1; & (x_1) \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_n &\geq c_2; & (x_2) \\ &..... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_n &\geq c_n. & (x_n) \end{aligned} \tag{5.2}$$

На переменные $y_1, \dots, y_m$ не наложены условия неотрицательности, так как все ограничения задачи (5.1) – это ограничения-равенства.

Математические модели (5.1) – (5.2) можно записать компактно. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$; $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$; $b_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ($\bar{b}_0$ – вектор-столбец, записанный как строка);

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда пара двойственных задач запишется так:

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max; \quad A\bar{x} = \bar{b}_0; \quad (\bar{x} - \text{здесь вектор-столбец}); \quad \bar{x} \geq \bar{0}. \quad (5.3)$$

$$W = (\bar{b}_0, \bar{y}) \rightarrow \min; \quad A^T \bar{y} \geq \bar{c} \quad (\bar{y}, \bar{c} - \text{здесь вектор-столбцы}). \quad (5.4)$$

Задача (5.3) – это задача (1); задача (5.4) – задача (2); A^T – транспонированная матрица A .

Пример 3. Симметричная двойственная пара.

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max :$$

$$A\bar{x} \leq \bar{b}_0;$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad (\text{задача (1)}).$$

$$W = (\bar{b}_0, \bar{y}) \rightarrow \min;$$

$$A^T \bar{y} \geq \bar{c}; \quad \bar{y} \geq \bar{0} \quad (\text{задача (2)}).$$

5.2. Несколько замечаний об умножении матриц

5.2.1. Умножить матрицу A на матрицу B можно, если число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B . Если матрица A содержит m строк и n столбцов, а матрица B состоит из n строк и l столбцов, то произведение $AB = C$ – это матрица, в которой m строк и l столбцов, причем

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, l.$$

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – частный случай матрицы. В зависимости от ситуации, вектор $\bar{x}$ можно считать вектор-строкой (1 строка и n столбцов) или вектор-столбцом (n строк, 1 столбец).

Так, в записи $A\bar{x} = \bar{b}_0$ векторы $\bar{x}$ и $\bar{b}_0$ – это вектор-столбцы. Это же равенство можно записать так: $\bar{x}A^T = \bar{b}_0$, но теперь $\bar{x}$ и $\bar{b}_0$ – вектор-строки.

Вектор-строку можно умножать на матрицу A слева, в результате получится вектор-строка. Вектор-столбец можно умножать на матрицу A справа, в результате получится вектор-столбец. Например,

$$(3, 1, -1) \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (4, 8); \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Произведение матриц транспонируется по правилу

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Транспонированная вектор-строка – это вектор-столбец; транспонированный вектор-столбец это – вектор-строка. В частности, система ограничений задачи (5.4): $A^T \bar{y} \geq \bar{c}$, где $\bar{c}$ и $\bar{y}$ – это вектор-столбцы, транспонируется так: $\bar{y}A \geq \bar{c}$, где $\bar{y}$ и $\bar{c}$ уже вектор-строки. Далее будут использованы обе возможности записи системы ограничений в матрично-векторной форме.

5.2.3. Множество решений системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}_0$ не изменится, если матрицу A и вектор-столбец $\bar{b}_0$ умножить слева на одну и ту же невырожденную матрицу B . Система $(BA)\bar{x} = B\bar{b}_0$ эквивалентна системе $A\bar{x} = \bar{b}_0$.

5.2.4. Единичной матрицей E называется квадратная матрица, в которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны 0.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Если A – квадратная невырожденная матрица, то существует невырожденная матрица A^{-1} , называемая *обратной* матрице A , такая, что $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

5.2.5. Определенные ранее элементарные преобразования системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}_0$ можно описать в терминах умножения матриц. Чтобы привести систему линейных уравнений к стандартному виду, т.е. выделить в каждом уравнении базисную переменную (ранее мы условились во избежание громоздких обозначений считать, что базисная переменная первого уравнения – это переменная x_1 , второго – x_2 , ..., m -го – x_m), нужно матрицу A и вектор $\bar{b}_0$ умножить слева на матрицу B^{-1} . Матрица B^{-1} – обратная матрице

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы B – это столбцы коэффициентов при переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Система линейных уравнений $B^{-1} A \bar{x} = B^{-1} \bar{b}_0$ эквивалентна системе $A\bar{x} = \bar{b}_0$, а в матрице $X = B^{-1} A$ первые m строк и столбцов образуют единичную матрицу, переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ в этой системе – базисные.

5.3. Несколько замечаний о свойствах скалярного произведения векторов

5.3.1. Скалярным произведением векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется число $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

5.3.2. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$.

5.3.3. $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{y}) + (\bar{x}_2, \bar{y})$.

5.3.4. Если векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ неотрицательны, $\bar{x} \geq \bar{0}$, $\bar{y} \geq \bar{0}$, то $(\bar{x}, \bar{y}) \geq \bar{0}$.

5.3.5. $(A\bar{x}, \bar{y}) = (A^T \bar{y}, \bar{x})$, где A – квадратная матрица с n строками.

5.4. Теоремы двойственности

5.4.1. Теорема 1 (основное неравенство теории двойственности).

Если $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – произвольные допустимые решения пары двойственных задач (5.3), (5.4), то

$$Z = (\bar{c}, \bar{x}) \leq W = (\bar{b}_0, \bar{y}). \quad (5.5)$$

Доказательство опирается на свойства скалярного произведения. Допустимость векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ означает справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{x} \geq \bar{0}, \quad A\bar{x} = \bar{b}_0, \quad A^T \bar{y} \geq \bar{c} \quad (A^T \bar{y} - \bar{c} \geq \bar{0}), \quad (\bar{b}_0, \bar{y}) = (A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A^T \bar{y}) = \\ = (A^T \bar{y}, \bar{x}). \quad \text{Поэтому } W - Z = (\bar{b}_0, \bar{y}) - (\bar{c}, \bar{x}) = (A^T \bar{y}, \bar{x}) - (\bar{c}, \bar{x}) = \\ = (A^T \bar{y} - \bar{c}, \bar{x}) \geq \bar{0}, \text{ так как } A^T \bar{y} - \bar{c} \geq \bar{0} \text{ и } \bar{x} \geq \bar{0}. \end{aligned}$$

Следствие 1. Если допустимые решения $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ пары двойственных задач (5.3) и (5.4) таковы, что $(\bar{c}, \bar{x}) = (\bar{b}_0, \bar{y})$, то $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – оптимальные решения этих задач.

Действительно, если $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – неоптимальное решение задачи (5.4), то существует такое допустимое решение задачи (5.4), вектор $\bar{y}_1 = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$, на котором целевая функция меньше, чем на векторе $\bar{y}$: $(\bar{b}_0, \bar{y}_1) < (\bar{b}_0, \bar{y}) = (\bar{c}, \bar{x})$. Получено противоречие с основным неравенством.

Следствие 2. Если целевая функция Z задачи (5.3) не ограничена сверху на допустимом множестве задачи (5.3), то у задачи (5.4) нет ни одного допустимого решения. Если целевая функция W задачи (5.4) не ограничена снизу на допустимом множестве задачи (5.4), то у задачи (5.3) нет ни одного допустимого решения.

Пусть, например, целевая функция Z не ограничена сверху, а у задачи (5.4) есть допустимые решения и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – одно из них. Обозначим через W_0 значение целевой функции W на векторе $\bar{y}$. В силу неограниченности целевой функции Z существует такое допустимое

решение $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задачи (5.3), на котором $Z = (\bar{c}, \bar{x}) > W_0$.
Получено противоречие с основным неравенством.

5.4.2. Теорема 2 (первая теорема двойственности).

Если одна из пары двойственных задач имеет решение, то и другая имеет решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают, $Z_{\max} = W_{\min}$.

Будем предполагать, что известно оптимальное решение задачи (5.3). Чтобы провести доказательство в другую сторону, нужно привести задачу (5.4) к каноническому виду.

Одновременно с общим доказательством покажем и на конкретном примере, как, имея оптимальную симплекс-таблицу для задачи (5.3), получить оптимальное решение задачи (5.4).

Пример 1. В табл. 5.1 показано оптимальное решение следующей ЗЛП:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 1,5x_2 + x_3 = 6;$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8;$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 1;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Приведем математическую модель двойственной задачи.

$$W = 6y_1 + 8y_2 + y_3 \rightarrow \min;$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3;$$

$$1,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 2;$$

$$y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0; \quad y_3 \geq 0.$$

Таблица 5.1

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	3	2	0	0	0	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	2	0	1	1	-0,5	0	2
x_1	3	1	0	-0,5	0,75	0	3
x_5	0	0	0	-1,5	1,25	1	2
Z		0	0	0,5	1,25	0	13

Здесь $Z_{\max} = 13$, оптимальные значения переменных: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 2$.

Исходные матрица коэффициентов при переменных и столбец правых частей таковы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через B матрицу (часть матрицы A), столбцы которой – это коэффициенты при *базисных переменных данной стандартной формы в исходной системе уравнений*.

В случае табл. 5.1 матрица B составляется из столбцов коэффициентов при переменных x_2, x_1, x_5 , которые являются базисными в оптимальном решении (x_2 – базисная переменная первого уравнения, x_1 – второго, x_5 – третьего). Значит,

$$B = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что обратной матрице B является матрица

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,75 & 0 \\ -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1}B = BB^{-1} = E.$$

Обозначим через X матрицу коэффициентов системы ограничений из некоторой симплекс-таблицы. В частности, в случае табл. 5.1 имеем

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{x}_0$ вектор правых частей, соответствующий матрице X . В нашем случае $\bar{x}_0 = (2, 3, 2)$. Матрица X и вектор $\bar{x}_0$ – это результат умножения матрицы B^{-1} на матрицу A и вектор $\bar{b}_0$ соответственно:

$$X = B^{-1}A; \quad \bar{x}_0 = B^{-1}\bar{b}_0.$$

Для рассматриваемого примера получаем

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,75 & 0 \\ -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & -0,5 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1}\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,75 & 0 \\ -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{c}_{\text{баз}}$ вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, через $\bar{\Delta}$ – вектор оценок переменных ($\bar{c}_{\text{баз}}$ – m -мерный вектор, $\bar{\Delta}$ – n -мерный вектор). Из формул пересчета оценок Δ_j следует, что $\bar{\Delta} = \bar{c}_{\text{баз}} X - \bar{c}$. Так как $X = B^{-1}A$, то

$$\bar{\Delta} = \bar{c}_{\text{баз}} B^{-1} A - \bar{c}. \quad (5.6)$$

Обозначим через $\bar{y}$ вектор $\bar{c}_{\text{баз}} B^{-1}$, тогда условие (5.6) запишется в виде $\bar{\Delta} = \bar{y} A - \bar{c}$. Транспонируя это равенство, получаем

$$A^T \bar{y} - \bar{c} = \bar{\Delta}. \quad (5.7)$$

Если $\bar{c}_{\text{баз}}^*$ – это вектор коэффициентов целевой функции при оптимальных базисных переменных, то соответствующий вектор $\bar{\Delta}$ – неотрицателен, все оценки $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда вектор

$$\bar{y} = \bar{c}_{\text{баз}}^* B^{-1} \quad (5.8)$$

есть допустимое решение задачи (5.4), так как $A^T \bar{y} - \bar{c} = \bar{\Delta} \geq \bar{0} \Rightarrow A^T \bar{y} \geq \bar{c}$.

$$\begin{aligned} \text{В нашем случае } \bar{c}_{\text{баз}}^* &= (2, 3, 0); \quad \bar{c}_{\text{баз}}^* B^{-1} = (2, 3, 0) \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,75 & 0 \\ -1,5 & 1,25 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (0,5; 1,25; 0). \end{aligned}$$

Из равенства (5.7) следует, что оценка Δ_j – это разность между значениями левой и правой части j -го ограничения задачи (5.4), когда в качестве значений неизвестных берутся компоненты вектора $\bar{y} = \bar{c}_{\text{баз}}^* B^{-1}$. Эти значения удовлетворяют системе ограничений задачи (5.4) в случае выполнения (5.8).

Убедимся, что вектор $\bar{y} = (0,5; 1,25; 0)$ – допустимое решение двойственной задачи: $0,5 \times 1 + 1,25 \times 2 + 0 \times (-1) = 3$ ($3 = c_1$); $0,5 \times 1,5 + 1,25 \times 1 + 0 \times 1 = 2$ ($2 = c_2$); $y_1, y_2, y_3 \geq 0 = c_3 = c_4 = c_5$. Целевая функция двойственной задачи равна на векторе $\bar{y} = (0,5; 1,25; 0)$ числу $W = 6 \times 0,5 + 8 \times 1,25 + 1 \times 0 = 13 = Z_{\text{max}}$, так что найденное решение двойственной задачи не только допустимо, но также и оптимально.

Докажем, что всегда вектор (5.8) есть оптимальное решение задачи (5.4).

$$Z_{\text{max}} = (\bar{c}_{\text{баз}}^*, \bar{x}_0) = (\bar{c}_{\text{баз}}^*, B^{-1} \bar{b}_0) = (\bar{c}_{\text{баз}}^* B^{-1}, \bar{b}_0) = (\bar{y}, \bar{b}_0) = W(\bar{y}).$$

Из совпадения значений целевых функций пары двойственных задач вытекает (следствие 1 из основного неравенства) оптимальность вектора $\bar{y}$. Теорема доказана.

Легко видеть, что если исходная система ограничений записана в стандартной форме (матрица A содержит единичную матрицу E), то матрица B^{-1} состоит из тех столбцов оптимальной симплекс-таблицы, которые соответствуют исходным базисным переменным. Тогда вектор $\bar{y}$ составляют оценки этих переменных, сложенные с соответствующими коэффициентами целевой функции.

В нашем примере переменные x_3, x_4, x_5 были исходными базисными переменными. Поэтому матрица B^{-1} состоит из столбцов оптимальной симплекс-таблицы при переменных x_3, x_4, x_5 . Оценки этих переменных таковы: $\Delta_3 = 0,5$; $\Delta_4 = 1,25$; $\Delta_5 = 0$. Так как $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, то $y_1 = \Delta_3 = 0,5$; $y_2 = \Delta_4 = 1,25$; $y_3 = \Delta_5 = 0$.

Пример 2. Рассмотрим такую ЗЛП:

$$Z = 8x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \max ;$$

$$5x_1 + x_3 + 3x_4 = 15 ;$$

$$x_1 + x_2 + 1,6x_4 = 4 ;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_n \geq 0 .$$

Приведем математическую модель двойственной задачи.

$$W = 15y_1 + 4y_2 \rightarrow \min ;$$

$$5y_1 + y_2 \geq 8 ;$$

$$y_2 \geq 1 ;$$

$$y_1 \geq -1 ;$$

$$3y_1 + 1,6y_2 \geq 6 .$$

Запишем решение этой задачи в симплекс-таблицах (табл.5.2).

Оптимальное решение: $Z_{\max} = 25,2$; $x_1 = 2,4$; $x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1,6 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

На первой итерации базисные переменные – это переменные x_3, x_2 .

Значит, $\bar{c}_{1\text{баз}} = (-1; 1)$; $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\bar{\Delta}_1 = (-12; 0; 0; -7,4)$;

$$\bar{y}_1 = \bar{c}_{1\text{баз}} B_1^{-1} = (-1; 1) = (\Delta_3 + c_3; \Delta_2 + c_2) = (0 - 1; 0 + 1).$$

Так как Δ_1 и Δ_4 меньше нуля, первое и четвертое ограничения двойственной задачи не удовлетворяются для данных значений y_1, y_2 .

Таблица 5.2

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	8	1	-1	6	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
I	x_3	-1	5 (1)	0 (0)	1 (0,2)	3 (0,6)
	x_2	1	1	1	0	1,6
	Z		-12	0	0	-7,4
II	x_1	8	1	0	0,2	0,6
	x_2	1	0	1	-0,2	1
	Z		0	0	2,4	-0,2
III	x_1	8	1	-0,6	0,32	0
	x_4	6	0	1	-0,2	1
	Z		0	0,2	2,36	0

На второй итерации базисные переменные – это переменные x_1 и x_2 , тогда

$$B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{c}_{2\text{баз}} = (8; 1); \quad \bar{\Delta}_2 = (0; 0; 2,4; -0,2);$$

$$\bar{y}_2 = \bar{c}_{2\text{баз}} B_2^{-1} = (1,4; 1) = (\Delta_3 + c_3; \Delta_2 + c_2) = (2,4 - 1; 0 + 1).$$

На векторе $\bar{y}_2 = (1,4; 1)$ не удовлетворяется четвертое ограничение двойственной задачи, так как $\Delta_4 = -0,2 < 0$. В части III табл. 5.2 записано оптимальное решение. Имеем:

$$\bar{c}_{3\text{баз}} = (8, 6); \quad B_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1,6 \end{pmatrix}; \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0,32 & -0,6 \\ -0,2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Delta}_3 = (0; 0,2; 2,36; 0);$$

$$\bar{y}_3 = \bar{c}_{3\text{баз}} B_3^{-1} = (1,36; 1,2) = (\Delta_3 + c_3; \Delta_2 + c_2) = (2,36 - 1; 1,2 + 0).$$

Все оценки неотрицательны, $\bar{y}_3$ – оптимальное решение двойственной задачи.

$$W_{\min} = 15 \times 1,36 + 4 \times 1,2 = 25,2 = Z_{\max}.$$

5.4.2. Теорема 3 (вторая теорема двойственности).

Объединяя утверждения из 5.4.1 (следствие 1) и 5.4.2, получаем, что допустимые решения $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ пары двойственных задач оптимальны тогда и только тогда, когда значения целевых функций Z и W на этих решениях совпадают.

$$Z_{\max} = (\bar{c}, \bar{x}) = (\bar{b}_0, \bar{y}) = W_{\min}. \quad (5.9)$$

Необходимое и достаточное условие оптимальности допустимых решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ можно записать в виде совокупности равенств. Пусть $(\bar{c}, \bar{x}) = (\bar{b}_0, \bar{y})$. Тогда $(\bar{c}, \bar{x}) - (\bar{b}_0, \bar{y}) = 0$. В силу допустимости векторов $\bar{x}, \bar{y}$ ($A\bar{x} = \bar{b}_0$; $\bar{x} \geq \bar{0}$; $A^T \bar{y} - \bar{c} \geq \bar{0}$) можно записать такую цепочку равенств: $(\bar{c}, \bar{x}) - (\bar{b}_0, \bar{y}) = (\bar{c}, \bar{x}) - (A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{c}, \bar{x}) - (A^T \bar{y}, \bar{x}) = (-A^T \bar{y} + \bar{c}, \bar{x}) = (A^T \bar{y} - \bar{c}, \bar{x}) = 0$.

Скалярное произведение $\sum_{i=1}^n a_i b_i$ неотрицательных векторов $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ равно нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое $a_i b_i$ равно нулю. Векторы $\bar{x}$ и $A^T \bar{y} - \bar{c}$ неотрицательны; j -я компонента вектора $A^T \bar{y} - \bar{c}$ – это разность между значениями левой и правой частей j -го ограничения задачи (5.4), она равна выражению

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m - c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $A^T \bar{y} - \bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда выполняются следующие n условий

$$x_j (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m - c_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Условия (5.10) называются **условиями дополняющей нежесткости**.

Другими словами, если переменная x_j задачи (5.3) отлична от нуля, соответствующее ей j -е ограничение двойственной задачи обращается в строгое равенство

Приведенные рассуждения легко обратить (провести их в обратном порядке). Тогда из условий (5.10) вытекает равенство целевых функций Z и W задач (5.3) и (5.4).

Пример 3. Найти оптимальное решение ЗЛП.

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ 4x_1 + x_3 + x_4 &= 16; \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 4; \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

если известно оптимальное решение двойственной задачи

$$y_1 = 1,625; \quad y_2 = -0,25.$$

Составим двойственную задачу

$$\begin{aligned} W &= 16y_1 + 4y_2 \rightarrow \min; \\ 4y_1 + 6y_2 &\geq 5; \\ -4y_2 &\geq 1 \quad y_1 - y_2 \geq 1; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$y_1 + y_2 \geq 1.$$

Запишем условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned} x_1(4y_1 + 6y_2 - 5) &= 0; \\ x_2(-4y_2 - 1) &= 0; \\ x_3(y_1 - y_2 - 1) &= 0; \\ x_4(y_1 + y_2 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Если $y_1 = 1,625$; $y_2 = -0,25$, то выражения в скобках обращаются в 0 в первом и втором случаях (первое и второе ограничения двойственной задачи обращаются в равенства при указанных значениях переменных y_1 и y_2). Выражения в скобках отличны от 0 для третьего и четвертого условий (третье и четвертое ограничения двойственной задачи превращаются в строгие неравенства, так как $y_1 - y_2 = 1,625 + 0,25 = 1,875 > 1$; $y_1 + y_2 = 1,625 - 0,25 = 1,375 > 1$).

Для выполнения условий (5.13) необходимо положить $x_3 = x_4 = 0$. Тогда x_1 и x_2 можно найти из (5.11), подставляя в качестве значений переменных x_3 и x_4 нули. Имеем: $4x_1 = 16$; $6x_1 - 4x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $Z_{\max} = 5 \times 4 + 5 = 25$; $W_{\min} = 16 \times 1,625 - 4 \times 0,25 = 25$; $Z_{\max} = W_{\min}$.

Пример 4. Дан вектор $\bar{x} = (3; 0; 1; 3)$. Определить, является ли он оптимальным решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} Z &= -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 6; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2; \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Заметим, что вектор $\bar{x}$ – допустимое решение задачи (5.14). Построим двойственную задачу.

$$\begin{aligned} W &= 2y_1 + 6y_2 - 2y_3 \rightarrow \min; \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq -2; \\ -y_1 + y_2 - 3y_3 &\geq -1; \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 &\geq 1; \\ -y_1 + y_2 - y_3 &\geq 1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Запишем условия дополняющей нежесткости и по ним найдем значения y_1, y_2, y_3 . Если окажется, что найденные значения переменных удовлетворяют всем ограничениям задачи (5.15), то данный вектор $\bar{x}$ и найденный вектор $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ являются не только допустимыми, но и оптимальными решениями своих задач. Если же вектор $\bar{y}$ не будет допустимым решением своей задачи, то вектор $\bar{x}$ не оптимален.

$$\begin{aligned} 3(y_1 + 2y_2 + y_3 - (-2)) &= 0; \\ 0(-y_1 + y_2 - 3y_3 - (-1)) &= 0; \\ 1(2y_1 - 3y_2 - 2y_3 - 1) &= 0; \\ 3(-y_1 + y_2 - y_3 - 1) &= 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Чтобы удовлетворить условиям (6.16), нужно превратить в равенства первое, третье, четвертое ограничения задачи (5.15). Получится такая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}y_1 + 2y_2 + y_3 &= -2; \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 &= 1; \\ -y_1 + y_2 - y_3 &= 1.\end{aligned}$$

Решение системы таково: $y_1 = y_3 = -2/3$; $y_2 = -1/3$.

Подставив эти числа во второе, пропущенное нами ограничение задачи (5.16), получим верное неравенство, так как $2/3 - 1/3 + 2 = 7/3 > -1$. Итак, данный вектор $\bar{x}$ – оптимальное решение задачи (5.14); вектор $\bar{y}$ – оптимальное решение задачи (5.1); $Z_{\max} = W_{\min} = -2$.

Пример 5. Сформулируем условия дополняющей нежесткости для симметричной пары двойственных задач.

$$\begin{aligned} Z = (\bar{c}, \bar{x}) &\rightarrow \max; & W = (\bar{b}_0, \bar{y}) &\rightarrow \min; \\ A\bar{x} &\leq \bar{b}_0; & A^T \bar{y} &\geq \bar{c}; \\ \bar{x} &\geq \bar{0} & \bar{y} &\geq \bar{0}. \end{aligned} \quad (5.17) \quad (5.18)$$

Приведем задачу (5.17) к каноническому виду, добавив в каждое из ее ограничений дополнительную переменную t_i , $i = 1, \dots, m$.

[illegible]

Задача, двойственная (5.19), – это задача (5.18), но условия неотрицательности $\bar{y} \geq \bar{0}$ теперь *включаются в систему ограничений*, поэтому условий дополняющей нежесткости всего $n + m$, они таковы:

$$\begin{aligned} x_j(a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m - c_j) &= 0, \quad j=1, \cdots, n; \\ t_i y_i &= 0, \quad i=1, \cdots, m. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Если выразить переменную t_i через переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, последние m условий запишутся так:

$$y_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.21)$$

5.5. Двойственный симплекс-метод

Из доказательства второй теоремы двойственности следует, что в случае выполнения условий дополняющей нежесткости (5.10) для равенства целевых функций Z и W задач (5.3) и (5.4) достаточно, чтобы вектор $\bar{x}$ был решением системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}_0$ задачи (5.3). Ограничения $\bar{x} \geq \bar{0}$ и $A^T \bar{y} \geq \bar{c}$ могут нарушаться.

При решении задачи (5.3) симплекс-методом идет перебор допустимых решений задачи (5.3). На всех итерациях, кроме последней, векторы $\bar{y} = \bar{c}_{\text{баз}} B^{-1}$ не являются допустимыми решениями задачи (5.4). Но условия дополняющей нежесткости выполняются всегда. Действительно, если $x_j > 0$ (т.е. x_j – базисная переменная), то $\Delta_j = 0$. Это означает, что j -е ограничение двойственной задачи превращается в строгое равенство на векторе $\bar{y}$.

Можно предложить симметричный алгоритм, основанный на переборе допустимых решений задачи (5.4). Перебор осуществляется с помощью симплекс-таблиц, в каждой из которых все оценки Δ_j неотрицательны, $\Delta_j \geq 0$ (обеспечение допустимости вектора $\bar{y}$). Но значения переменных x_j хотя и удовлетворяют системе ограничений задачи (5.3) ($A\bar{x} = \bar{b}_0$), но не удовлетворяют условию $x_j \geq 0$, $j=1, \dots, n$ (среди правых частей есть отрицательные). На каждом новом векторе $\bar{y}$ целевая функция W задачи (5.4) меньше, чем на предыдущем. Через конечное число шагов находится $W_{\min}$, что означает одновременное определение $Z_{\max}$ и оптимального решения $\bar{x}$ (все правые части симплекс-таблицы становятся неотрицательными). Описанный алгоритм называется **двойственным симплекс-методом**. Обоснование двойственного симплекс-метода сопроводим решением примера.

Пример. Рассмотрим такую ЗЛП:

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max ; \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 30 ; \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -10 ; \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{aligned} W &= 30y_1 - 10y_2 \rightarrow \min ; \\ 2y_1 - y_2 &\geq 2 ; \\ 3y_1 - 2y_2 &\geq 6 ; \\ y_1 &\geq 2 ; \quad y_2 \geq -1 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 5.3).

Вектор $\bar{x} = (0; 0; 30; -10)$ недопустим, так как $x_4 < 0$. Но вектор $\bar{y}_1 = (\Delta_3 + 2; \Delta_4 - 1) = (0 + 2; 0 - 1) = (2; -1)$ – допустимое решение двойственной задачи. $W_1 = 30y_1 - 10y_2 = 70 = Z$. Перейдем к вектору $\bar{y}_2$, на котором целевая функция W уменьшится.

Сначала выберем уравнение, в котором заменяется базисная переменная. Условимся уменьшать целевую функцию W , выбирая правую часть и соответствующий опорный элемент отрицательными.

Таблица 5.3

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	2	6	21	-1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	2	3	1	0	30
x_4	-1	-1 (1/2)	-2 (1)	0 (0)	1 (-1/2)	-10 (5)
Z		3	2	0	0	70

Имеется только одна отрицательная правая часть (во втором уравнении), поэтому замену переменной проведем во втором уравнении.

Отметим, что если бы в левой части второго уравнения все коэффициенты были неотрицательны, то задача (5.26) не имела бы ни одного допустимого решения, ведь уравнение вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = -b$, где $a_1, \dots, a_n, b \geq 0$ не имеет неотрицательных решений.

Есть две возможности выбрать новую базисную переменную: или x_1 , или x_2 . Сделаем выбор, исходя из требования неотрицательности всех оценок Δ_j , $j = 1, \dots, n$. По формуле пересчета

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{rj}}{x_{rs}} \Delta_s \geq 0, \quad (5.28)$$

где r – номер уравнения, в котором заменяется базисная переменная; s – номер новой базисной переменной.

Так как $\Delta_j, \Delta_s \geq 0$ и было условлено, что $x_{rs} < 0$, то наверняка $\Delta_j \geq 0$, когда $x_{rj} \geq 0$. Если же $x_{rj} < 0$, то условие (5.28) можно записать в виде

$$\frac{\Delta_s}{|x_{rs}|} \leq \frac{\Delta_j}{|x_{rj}|}. \quad (5.29)$$

Итак, отношение $\frac{\Delta_s}{|x_{rs}|}$ должно быть минимальным из всех отношений $\frac{\Delta_j}{|x_{rj}|}$ таких, что $x_{rj} < 0$.

В нашем случае имеем: $\min(\frac{3}{|-1|}; \frac{2}{|-2|}) = 2$. Новой базисной переменной становится переменная x_2 . Построим табл. 5.4.

Таблица 5.4

Базисные перемен.	$c_{\text{баз}}$	2	6	2	-1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	0,5	0	1	1,5	15
x_2	6	0,5	1	0	-0,5	5
Z		2	0	0	1	60

Вектор $\bar{x} = (0, 5, 15, 0)$ — допустимое и оптимальное решение задачи (5.26). Вектор $\bar{y}_2 = (\Delta_3 + 2; \Delta_4 - 1) = (2, 0)$ — допустимое и оптимальное решение двойственной задачи, $Z_{\max} = 2 \times 15 + 6 \times 5 = 60 = 2 \times 30 = W_{\min}$.

5.6. Двойственность и анализ на чувствительность

Выясним, как, зная оптимальное решение задачи (5.3), получить новое оптимальное решение, если в исходную математическую модель внесены изменения.

Идеи анализа на чувствительность опишем, решая следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
 Z &= x_1 + 8x_2 + 3x_3 \rightarrow \max; \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3; \\
 2x_1 - x_2 &= 4; \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Применим метод искусственного базиса (табл. 5.5).

Оптимальные значения переменных: $x_1 = 2,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 0$; $Z_{\max} = 5,4$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,4 \\ 1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,2 \end{pmatrix}; \quad \Delta = (0; 0; 0,4). \\
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таблица 5.5

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	0 (1)	0 (8)	0 (3)	1	Правые части
		x_1	x_2	x_3	y_1	
I	x_3	0	1	2	1	3
	y_1	1	2 (1)	-1 (-1/2)	0 (0)	1 (1/2)
	Z		2	-1	0	4
II	x_3	3	0 (0)	2,5 (1)	1 (2/5)	1 (2/5)
	x_1	1	1	-0,5	0	2
	Z		0	-1	0	5
III	x_2	8	0	1	0,4	0,4
	x_1	1	1	0	0,2	2,2
	Z		0	0	0,4	5,4

Найдем матрицу B^{-1} , соответствующую оптимальной симплекс-таблице. Матрица B состоит из столбцов матрицы A , при переменных x_1 и x_2 – базисных переменных оптимальной симплекс-таблицы (x_2 – базисная переменная первого уравнения, x_1 – второго).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу B^{-1} можно вычислить непосредственно по матрице B , а можно и по оптимальной симплекс-таблице. Нужно только продолжить формально вычисление столбца y . Если эти вычисления выполнить, коэффициенты при переменной y будут такими: $x_{14} = -0,2$; $x_{24} = 0,4$. Как уже было показано, столбцы матрицы B^{-1} – это столбцы оптимальной симплекс-таблицы, которые были единичными в исходной симплекс-таблице. Таким образом,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Контроль:

$$B^{-1} A = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,4 \\ 1 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} = X;$$

$$B^{-1} \bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} = \bar{x}_0.$$

Рассмотрим последовательно возможные изменения математической модели.

Изменение значений правых частей системы ограничений

Пусть изменился вектор правых частей $\bar{b}_0$. Изменение правых частей исходной системы уравнений влечет изменение последнего столбца (столбца правых частей) симплекс-таблиц. Обозначим вектор новых правых частей через $\bar{b}'_0$. Положим $\bar{b}'_0 = \bar{b}_0 + \Delta\bar{b}_0$, где $\Delta\bar{b}_0$ – вектор-столбец изменений правых частей. Тогда новый столбец правых частей в последней симплекс-таблице будет таким:

$$\bar{x}'_0 = B^{-1} \bar{b}'_0 = B^{-1} (\bar{b}_0 + \Delta\bar{b}_0) = \bar{x}_0 + B^{-1} \Delta\bar{b}_0 = \bar{x}_0 + \Delta\bar{x}'_0.$$

Если все компоненты вектора $\bar{x}'_0$ вновь неотрицательны, то найденное решение оптимально (ведь оценки Δ_j не изменились, $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$). Если среди компонент вектора $\bar{x}'_0$ есть числа меньше нуля, нужно продолжить поиск оптимального решения, используя процедуру двойственного симплекс-метода.

Пусть, например, правая часть первого уравнения возросла на единицу, а правая часть второго уменьшилась на единицу, т.е.

$$\Delta\bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}'_0 = \bar{b}_0 + \Delta\bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 +$$

$$+ B^{-1} \Delta\bar{b}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,6 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обе правые части по-прежнему больше 0. Оптимальное решение ЗЛП

$$Z = x_1 + 8x_2 + 3x_3 \rightarrow \max :$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;$$

$$2x_1 - x_2 = 3;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

дается вектором $\bar{x} = (2, 1, 0)$; $Z_{\max} = 10$.

Изменение коэффициентов целевой функции

Изменение коэффициентов целевой функции влечет только изменение оценок свободных переменных. Эти оценки вычисляются непосредственно по оптимальной симплекс-таблице, когда в столбце $\bar{c}_{\text{баз}}$ нужно проставить новые значения коэффициентов c_j . Если полученные оценки Δ_j вновь все неотрицательны, найденное решение по-прежнему оптимально, если нет, то поиск оптимального решения нужно продолжить симплекс-методом.

Включение в исходную модель дополнительных переменных

Если в исходную модель включаются новые переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$, то в матрице A появляются новые столбцы; матрица A превращается в матрицу A' :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1n+1} & a_{1n+2} & \cdots & a_{1n+k} \\ a_{2n+1} & a_{2n+2} & \cdots & a_{2n+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mn+1} & a_{mn+2} & \cdots & a_{mn+k} \end{pmatrix}.$$

Вектор коэффициентов целевой функции получает размерность $n + k$, в целевой функции появляются k новых коэффициентов, $c_{n+1}, \dots, c_{n+k}$. Обозначим через $\bar{c}'$ вектор $(c_{n+1}, \dots, c_{n+k})$.

В последней симплекс-таблице матрица X расширится на матрицу

$$X' = B^{-1} A';$$

а у вектора оценок $\bar{\Delta}$ появятся новые компоненты

$$\bar{\Delta}' = \bar{c}_{\text{баз}} X' - \bar{c}'.$$

Если все новые оценки неотрицательны, то найденное ранее решение оптимально. В противном случае следует продолжить поиск оптимального решения с помощью симплекс-метода.

Пусть, например, задача (5.30) изменилась так:

$$Z = x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3;$$

$$2x_1 - x_2 + \quad \quad 2x_4 = 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Здесь $A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $X' = B^{-1} A' = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\bar{c}' = (2)$; $\bar{\Delta}' = \bar{c}_{\text{баз}} X' - \bar{c}' = (8, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (2) = (1) - (2) = (-1)$. Оценка Δ_4 вновь введенной переменной x_4 меньше 0. Целевую функцию Z можно увеличить, если сделать переменную x_4 базисной во втором уравнении, переведя переменную x_1 в свободные переменные.

Включение дополнительных ограничений

Каждое дополнительное ограничение добавляет строку в симплекс-таблицу. Если это ограничение содержит свою базисную переменную, строка вставляется в оптимальную симплекс-таблицу естественным образом. В противном случае в новое уравнение нужно добавить искусственную базисную переменную и продолжать решение, используя метод искусственного базиса.

Пусть в систему ограничений задачи (5.30) добавилось неравенство $x_1 + x_2 \leq 2$. Превратим неравенство в уравнение $x_1 + x_2 + x_4 = 2$; $x_4 \geq 0$. Переменная x_4 становится базисной переменной третьего уравнения.

Чтобы добавить это уравнение в оптимальную симплекс-таблицу, нужно выразить базисные переменные x_1 и x_2 через свободную переменную x_3 (см. табл. 5.5, ч. III): $x_1 = 2,2 - 0,2x_3$; $x_2 = 0,4 - 0,7x_3$.

Уравнение $x_1 + x_2 + x_4 = 2$ примет вид $-0,9x_3 + x_4 = -0,6$. Последняя симплекс-таблица станет такой (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Базисные переменные	$c_{\text{баз}}$	1	8	3	0	Правые части
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	8	0	1	0,4	0	0,4
x_1	1	1	0	0,2	0	2,2
x_4	0	0	0	-0,9	1	-0,6
Z		0	0	0,4	0	5,4

В табл. 5.6 стоит недопустимое решение, так как $x_4 = -0,6 < 0$. Поиск оптимального решения следует продолжить с помощью двойственного симплекс-метода.

5.7. Задачи

1. Доказать, что $(AB)^T = B^T A^T$.
2. Доказать эквивалентность систем уравнений $A\bar{x} = \bar{b}_0$ и $(BA)\bar{x} = B\bar{b}_0$, где B – невырожденная матрица.
3. Доказать перечисленные в параграфе 5.3 свойства скалярного произведения векторов.
4. Как изменится множество решений задачи (5.4), если матрицу A системы ограничений задачи (5.3) умножить справа на невырожденную матрицу B ?
5. Как вычислить оптимальную матрицу B^{-1} , если исходная система ограничений задачи (5.3) не приведена к стандартной форме?
6. В двойственном симплекс-методе сначала определяется уравнение, в котором заменяется базисная переменная, а потом находится свободная переменная, которая становится базисной. Напомним правило выбора уравнения: правая часть и опорный элемент – отрицательны, тогда целевая функция Z задачи (5.3) уменьшится. Но значение Z уменьшится и в том случае, если правая часть и опорный элемент будут больше 0. Каким станет правило выбора свободной переменной?
7. Пусть $X_k, B_k, X_{k+1}, B_{k+1}$ – соответствующие матрицы k -й и $(k+1)$ -й итераций симплекс-метода. Положим, что на $(k+1)$ -й итерации

свободная переменная x_s становится базисной переменной в r -м уравнении. Как связаны между собой матрицы X_k и X_{k+1} ; B_k и B_{k+1} ?

В задачах 8 – 13 требуется построить двойственную пару.

$$8. Z = 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \max ; \quad 9. Z = 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 - 7x_2 + 5x_3 \geq 10;$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 15;$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9;$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 12;$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 18;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$10. Z = 3x_2 - x_4 \rightarrow \min ;$$

$$11. Z = -x_2 + x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12;$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1;$$

$$x_2 + x_3 - 3x_4 = 5;$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$12. Z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8;$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4;$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

$$13. Z = 6x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 10;$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 5;$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 4 ;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

В задачах 14 – 29 нужно решить графически одну из задач двойственной пары, а затем найти оптимальное решение другой задачи.

$$14. Z = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$$

$$15. Z = 6x_1 + 9x_2 + x_3 \rightarrow \min ;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3;$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2;$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 4;$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$16. Z = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \min ;$$

$$17. Z = 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1;$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12;$$

- $$\begin{aligned}
& -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; & x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 1; \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$
18. $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min$; 19. $Z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$;
- $$\begin{aligned}
& -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 2; & x_1 - x_2 \leq 1; \\
& x_1 - 3x_2 + x_4 \geq -2. & x_1 + x_2 \geq 1; \\
& & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$
20. $Z = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$; 21. $Z = x_2 \rightarrow \min$;
- $$\begin{aligned}
& 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32; & -2x_1 + x_2 \geq 4; \\
& x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; & x_1 + x_2 \leq 0; \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & x_1 \geq 0.
\end{aligned}$$
22. $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$; 23. $Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min$;
- $$\begin{aligned}
& x_1 - 2x_2 \leq 4; & 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\
& 2x_1 - x_2 \geq -4; & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\
& x_1 + x_2 \leq 10; & x_2, x_3, x_4 \geq 0. \\
& x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$
24. $Z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$; 25. $Z = x_1 - x_2 \rightarrow \max$;
- $$\begin{aligned}
& -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; & 2x_1 + x_2 \geq 5; \\
& -2x_1 - 2x_2 \geq -3; & 3x_1 - x_2 \leq 6. \\
& x_1 \leq 0; x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$
26. $Z = 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$; 27. $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;
- $$\begin{aligned}
& 12x_1 - 9x_2 + 9x_3 \geq 8; & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30; \\
& -x_1 + x_2 + x_3 = 5; & x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40; \\
& & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$
28. $Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$; 29. $Z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$;
- $$\begin{aligned}
& x_1 + 4x_2 + x_4 = 8; & 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50; \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 4; & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

30. Для каждой из двойственных пар имеются три возможности: задача имеет решение (Р), целевая функция неограниченна (Н), допустимая область пуста (П). Формально можно составить 9 сочетаний: РР (обе задачи имеют решение), РН (первая задача имеет решение, целевая функция второй неограниченна) и т.д. Указать возможные сочетания.

31. Рассмотреть задачу

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - x_2 \leq 0,6;$$

$$x_1 - x_2 \geq 2;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Показать, что обе задачи двойственной пары не имеют допустимых решений.

32. Дана оптимальная симплекс-таблица некоторой ЗЛП с максимизируемой целевой функцией, тремя ограничениями вида $\leq$ и двумя переменными x_1 и x_2 .

Найти двумя разными способами значение целевой функции.

Базисные переменные.	3	2	0	0	0	Правые части
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	1	1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	-1	1	2
Z	0	0	0	3	2	?

33. Дана задача линейного программирования

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30;$$

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 20;$$

$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 60;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

Ниже приведены обратные матрицы и соответствующие им базисные переменные для различных симплекс-итераций. Требуется восстановить по этим данным симплекс-таблицы.

$$1. (x_4, x_3, x_6); \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. (x_2, x_3, x_1); \begin{pmatrix} 0,25 & -0,125 & 0,125 \\ 1,5 & -0,25 & -0,75 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$3. (x_2, x_3, x_6); \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Дана следующая ЗЛП

$$Z = 4x_1 + 14x_2 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21 ;$$

$$7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 ;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 .$$

Ниже приведены обратные матрицы и соответствующие им базисные переменные для различных симплекс-итераций. Определить, являются ли допустимыми опорные решения в смысле неотрицательности базисных переменных.

$$1. (x_2, x_4); \quad \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -2/7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. (x_2, x_3); \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -7/2 \end{pmatrix};$$

$$3. (x_2, x_1); \quad \begin{pmatrix} 7/45 & -2/45 \\ -2/45 & 7/45 \end{pmatrix};$$

$$4. (x_1, x_4); \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Дана задача линейного программирования

$$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min ;$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 ;$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3 ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 ;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 .$$

Ниже приведена обратная матрица и соответствующие ей базисные переменные для некоторой симплекс-итерации. Является ли указанный набор базисных переменных оптимальным?

$$(x_1, x_3, x_5); \quad \begin{pmatrix} 0,2 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

36. Дана следующая ЗЛП:

$$Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 ;$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 ;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 .$$

С помощью соотношений двойственности определить, какой из указанных наборов базисных переменных является оптимальным.

$$1. (x_1, x_4); \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 11/3 \end{pmatrix}; \quad 2. (x_2, x_2); \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix};$$

$$3. (x_2, x_3); \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

В упражнениях 37 – 47 нужно решить одну из задач двойственной пары симплекс-методом, а затем найти оптимальное решение другой задачи.

$$37. Z = 11x_1 + 14x_2 + 15x_3 \rightarrow \min; \quad 38. Z = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \rightarrow \max;$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 7;$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24;$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 9;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 18;$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 14;$$

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$39. Z = 3x_1 + 2x_5 - x_6 \rightarrow \max;$$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30;$$

$$4x_1 + x_3 + x_5 - 4x_6 = 28;$$

$$-3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

$$40. Z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$$

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 50;$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \geq 30;$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 35;$$

$$2x_1 + 4x_2 - 15x_3 \geq 10;$$

$$12x_1 + 10x_2 \geq 90;$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 20;$$

$$x_1 - 10x_3 \geq 20;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$41. Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max;$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 2;$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

$$42. Z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \min ; \quad 43. Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min ;$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0;$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2;$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0;$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5;$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$44. Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min ;$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6;$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8;$$

$$-x_1 + x_3 \leq 2;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$45. Z = -2x_1 - 4x_3 + 2x_5 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 10x_5 + x_6 = 29;$$

$$x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -5;$$

$$2x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 - x_6 = 2;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

$$46. Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 10;$$

$$-3x_1 - 2x_2 + x_5 = 4;$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 7;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

$$47. Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -1;$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

В упражнениях 48 – 57 требуется определить, является ли данный вектор $\bar{x}$ оптимальным решением указанной ЗЛП.

$$48. \bar{x} = (3, 0, 1, 3);$$

$$Z = x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -3;$$

$$x_2 + x_3 = 1; \quad x_1 + 3x_4 = 12;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$49. \bar{x} = (0, 1, 1, 1);$$

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2;$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$50. \bar{x} = (2, 2, 1);$$

$$Z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max ;$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 5;$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 3;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$52. \bar{x} = (1, 2, 0, 0);$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4;$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$53. \bar{x} = (3, 0, 0, 0);$$

$$Z = 6x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 6;$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$54. \bar{x} = (0, 0, 0, 4);$$

$$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min ;$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4;$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$56. \bar{x} = (3, 1, 2);$$

$$Z = -2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min ;$$

$$-2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1;$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$51. \bar{x} = (2, 1, 1);$$

$$Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4;$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$55. \bar{x} = (1, 1, 1);$$

$$Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3;$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$57. \bar{x} = (1, 1, 0, 1);$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Найти решение ЗЛП 58 – 64, используя двойственный симплекс-метод.

$$58. Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \min ;$$

$$x_1 + x_2 \geq 2;$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$59. Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30;$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$60. Z = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$61. Z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \min ;$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24;$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$62. Z = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 8x_5 + 3x_6 \rightarrow \max ;$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18;$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24;$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

$$63. Z = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12;$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_4 \geq 16;$$

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30;$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 16;$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

$$64. Z = 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min ;$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 18;$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 30;$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

65. Дана следующая ЗЛП:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430;$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460;$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 ;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0. \text{ Требуется:}$$

1. Найти оптимальное решение этой ЗЛП, используя симплекс-метод.

2. Найти оптимальное решение для измененных правых частей.

а) (420, 460, 440); б) (500, 400, 600); в) (300, 800, 200);

г) (300, 400, 150).

3. Найти оптимальное решение, если введено четвертое ограничение:
 $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 570$.

4. Найти оптимальное решение для следующих целевых функций:

a. $Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$;

b. $Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$;

c. $Z = 3x_1 + x_3 \rightarrow \max$;

d. $Z = 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$;

e. $Z = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$.

5. Найти оптимальное решение, если введена новая переменная x_4 , так что ЗЛП принимает вид:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 430 ;$$

$$3x_1 + 2x_3 + 2x_4 \leq 460 ;$$

$$x_1 + 4x_2 + 4x_4 \leq 420 ;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 .$$

66. Дана ЗЛП

$$Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 ;$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 ; \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

1. Решить ЗЛП симплекс-методом.

2. Пусть правые части ограничений имеют вид $(30 + \theta ; 40 - \theta)$. Определить интервал значений θ , для которых полученное решение остается допустимым. Каково новое оптимальное решение, если $\theta = 10$?

3. Пусть целевая функция имеет вид

$$Z = (5 - \theta) x_1 + (2 + \theta) x_2 + (3 + \theta) x_3 .$$

Определить интервал значений θ , для которых сохраняется оптимальность решения, найденного при $\theta = 0$.

4. Пусть коэффициент при переменной x_2 равен $(5 - \theta)$ (второй вариант – коэффициент равен $-(5 - \theta)$) В каждом случае найти интервал значений θ , для которых остается оптимальным решение, найденное при $\theta = 0$.

5. Найти значения θ , для которых условия пунктов 2 и 3 выполняются одновременно.

6. Найти значения θ , для которых одновременно выполняются условия пунктов 2, 3, 4.

67. Дана следующая ЗЛП:

$$Z = x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 ;$$

$$2x_1 - x_2 = 4 ;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

1. Решить эту задачу симплекс-методом.

2. Выяснить, влияет ли введение каждого из указанных ограничений на оптимальность полученного решения. Если влияет, то указать новое решение.

а) $x_1 + x_2 \leq 2$; б) $x_1 + x_2 = 6$; в) $x_1 + 2x_2 \geq 50$; г) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$.

3. Найти оптимальное решение для следующих целевых функций:

а) $Z = 12x_1 + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$; б) $Z = 2x_1 - 5x_3 \rightarrow \min$.

4. Выяснить, как изменится оптимальное решение в случае введения переменной x_4 при указанных ниже вариантах значений коэффициентов при переменной x_4 в целевой функции (первое число) и системе ограничений (два следующих числа):

а) (5; 1; 2); б) (6; 2; 3); в) (10; 2; 5); г) (15; 3; 3).

68. Дана следующая ЗЛП:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 ;$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8 ;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 .$$

1. Решить эту задачу симплекс-методом.

2. Показать, как влияет на полученное решение введение каждого из указанных ограничений:

а) $2x_1 + x_2 - x_4 \geq 4$; б) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$; $x_1 + x_2 = 1$.

3. Пусть в математическую модель введена новая переменная x_5 . Увеличится ли значение целевой функции Z для указанных ниже вариантов значений коэффициентов при переменной x_5 в целевой функции (первое число) и системе ограничений (два следующих числа)?

а) (5; 1; 2); б) (6; 2; 3); в) (10; 2; 5); г) (15; 3; 3).

60. Дана следующая ЗЛП:

$$Z = 2x_1 - 5x_3 \rightarrow \max ;$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6 ;$$

$$x_1 + x_3 \geq 2 ;$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 ;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 .$$

1. Решить эту задачу симплекс-методом.
 2. Найти новое оптимальное решение, если вектор правых частей стал таким: (10; 2; 5).
 3. Найти новое оптимальное решение для новых коэффициентов целевой функции: $c_2 = 1$; $c_3 = 1$.
70. Как изменится оптимальное решение задачи

$$Z = 9x_1 + 11x_2 + 15x_3 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 260 ;$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 360 ; \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 220 ;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 ,$$

если ввести дополнительное ограничение $x_3 \geq 10$?

71. На фабрике производят 4 вида изделий. Суммарное время использования станков – 90 часов в день; комплектующих изделий может быть поставлено не более 80 штук в день. Остальные данные приведены в таблице.

1. Найти оптимальный план производства изделий.
2. Можно увеличить время работы станков на 10 ч в сутки, что будет стоить 40 ед. в день. Выгодно ли это? Если да, то каков новый план производства?
3. Стоимость одного из видов сырья, используемого при производстве изделий 1 и 3, часто меняется. Цена этого сырья включена в приведенную выше стоимость продукции. В данный момент стоимость сырья составляет 80 ед. за 10 кг сырья, причем на производство единицы изделия 1 требуется 0,3 кг сырья, на производство единицы изделия 3 требуется 0,5 кг сырья. В каких пределах может меняться цена этого вида сырья, чтобы исходное оптимальное решение не изменилось?

Производственные характеристики	Изделие			
	1	2	3	4
Время использования станка, часы	1	3	8	4

Число комплектующих изделий	2	2	1	3
Стоимость производства изделия, денежные ед.	20	25	40	55
Доход от продажи одного изделия, денежные ед.	30	45	80	85

72. Физик производит измерение значений переменной $y(x)$, результаты измерений – пары чисел (x_i, y_i) . Физик хочет подобрать уравнение прямой, которое наилучшим образом соответствовало бы экспериментальным данным в том смысле, что максимальное расстояние по вертикали между любой точкой (x_i, y_i) и этой прямой было бы как можно меньше. Сформулировать эту задачу как задачу линейного программирования. Из каких соображений следовало бы перейти к решению двойственной задачи?

73. В условиях задачи 72 построить двойственную пару, если нужно отыскать неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_k$ полинома

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k.$$

74. Дополнить математическую модель задачи 73, введя следующие условия:

- 1) экстремум (максимум или минимум) функции $y(x)$ в точке с абсциссой x ;
- 2) возрастание (убывание) функции $y(x)$ в точке с абсциссой x ;
- 3) положительность (отрицательность) функции $y(x)$ в точке с абсциссой x .

Какие еще дополнительные условия можно ввести?

6. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ (ТЗ)

6.1. Математическая модель транспортной задачи

Математическая модель транспортной задачи рассматривалась в главе 1. Повторим ее описание.

Имеется m поставщиков и n потребителей некоторого товара. Запасы i -го поставщика составляют a_i единиц товара, $i = 1, 2, \dots, m$. Потребности j -го потребителя равны b_j единиц товара, $j = 1, 2, \dots, n$. Стоимость перевозки единицы товара от i -го поставщика j -му потребителю равна c_{ij} единиц. Требуется определить, сколько единиц товара нужно перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, чтобы удовлетворить потребности с минимальными суммарными затратами. Обозначим через x_{ij} количество единиц товара, поставляемых i -м

поставщиком j -му потребителю, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Всего неизвестных $m \times n$, они называются **перевозками**. Будем полагать, что числа a_i и b_j ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) – натуральные. Тогда и оптимальное решение ТЗ можно искать в натуральных числах.

Кроме того, будем рассматривать только **закрытые** ТЗ, когда сумма всех запасов равна сумме всех потребностей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

В таком случае, чтобы удовлетворить все потребности, нужно полностью использовать запасы каждого поставщика.

Математическая модель закрытой ТЗ такова:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min . \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

Ограничения (6.2) называют ограничениями **по запасам** (их m штук). В каждом таком ограничении записано условие полного использования запасов данного поставщика.

Ограничения (6.3) называют ограничениями **по потребностям** (их n штук). В каждом таком ограничении записано условие полного удовлетворения потребностей данного потребителя.

Любую открытую ТЗ ($\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$) легко закрыть. Нужно ввести дополнительного поставщика (потребителя) с недостающим значением запаса (потребности) и с нулевыми стоимостями перевозок.

Условие ТЗ удобно записывать в матрице, которая называется **матрицей перевозок**. В ней $m + 1$ строка и $n + 1$ столбец. В первой строке указаны величины потребностей, в первом столбце – значения запасов. В клетках внутренней матрицы (их $m \times n$ штук) записывают стоимости перевозок и сами перевозки. Стоимости перевозок условимся записывать в правом верхнем углу клеток. Нумеровать будем только строки и столбцы внутренней матрицы.

Ниже приведена матрица перевозок закрытой ТЗ с тремя поставщиками и пятью потребителями (табл. 6.1).

Таблица 6.1

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20
30	2 x_{11}	7 x_{12}	3 x_{13}	6 x_{14}	2 x_{15}
70	9 x_{21}	4 x_{22}	5 x_{23}	7 x_{24}	3 x_{25}
50	5 x_{31}	7 x_{32}	6 x_{33}	2 x_{34}	4 x_{35}

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 70 + 50 = 150; \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 10 + 40 + 20 + 60 + 20 = 150.$$

Если бы, например, потребность b_4 равнялась не 60, а 40, нужно было бы ввести еще одного потребителя с потребностью $b_6 = 20$ и с нулевыми стоимостями $c_{16} = c_{26} = c_{36} = 0$. Матрица перевозок тогда станет следующей (табл. 6.2).

Таблица 6.2

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	20
30	2 x_{11}	7 x_{12}	3 x_{13}	6 x_{14}	2 x_{15}	0 x_{16}
70	9 x_{21}	4 x_{22}	5 x_{23}	7 x_{24}	3 x_{25}	0 x_{26}
50	5 x_{31}	7 x_{32}	6 x_{33}	2 x_{34}	4 x_{35}	0 x_{36}

Запишем математическую модель первой из указанных задач. В ней $3 \times 5 = 15$ переменных.

$$Z = 2x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 2x_{15} + 9x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 7x_{24} + 3x_{25} + 5x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34} + 4x_{35} \rightarrow \min;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 30;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 70;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 50;$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 10; \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 40; \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 20; \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 60; \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 20; \\
x_{11}, \dots, x_{35} &\geq 0.
\end{aligned}$$

6.2. Методы получения исходного допустимого решения ТЗ

Метод северо-западного угла. По методу северо-западного угла вначале получают значение перевозки x_{11} , которая расположена в северо-западной клетке матрицы перевозок. Причем x_{11} присваивается максимально возможное значение, $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. После этого вычеркивают соответствующий столбец (строку), так как остальные перевозки из этого столбца (строки) должны быть равны 0. Если $a_1 = b_1$, должны быть вычеркнуты и первый столбец, и первая строка.

Затем корректируют запасы (потребности) невычеркнутой строки (столбца), и все повторяется для северо-западной клетки оставшейся матрицы.

Для рассматриваемой ТЗ получается исходное решение, представленное в табл. 6.3 (нулевые перевозки не пишутся).

Таблица 6.3

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20
30	10 2	20 7	3	6	2
70	9	20 4	20 5	30 7	3
50	5	7	6	30 2	20 4

Найдем значение целевой функции.

$$Z = 2 \times 10 + 7 \times 20 + 4 \times 20 + 5 \times 20 + 7 \times 30 + 2 \times 30 + 4 \times 20 = 690.$$

Метод минимальной стоимости. В соответствии с методом минимальной стоимости вначале ненулевое значение принимает перевозка x_{ij} с минимальной стоимостью c_{ij} . Если минимальных стоимостей несколько, выбирается произвольная переменная. Выбранной перевозке

присваивается максимально возможное значение, $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Затем вычеркивается соответствующий столбец (строка), корректируется потребность (запас) невычеркнутого столбца (строки), и все повторяется сначала. В нашем случае имеем такое решение (табл. 6.4).

Таблица 6.4

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20
30	2 10	7	3	6	2 20
70	9	4 40	5 20	7 10	3
50	5	7	6	2 50	4

Целевая функция равна:

$$Z = 2 \times 10 + 2 \times 20 + 4 \times 40 + 5 \times 20 + 7 \times 10 + 2 \times 50 = 490.$$

Это значение меньше, чем полученное по методу северо-западного угла. Поясним подробнее, как оно было построено.

Минимальное значение стоимости равно 2, таких стоимостей 3: $c_{11} = c_{15} = c_{34} = 2$. Начнем, например, с перевозки x_{11} . Максимально возможное значение x_{11} равно 10. Полагаем $x_{11} = 10$ и вычеркиваем первый столбец. Запасы первого поставщика теперь равны 20. Обратимся к перевозке x_{15} . Ее нужно положить равной 20, так как $\min(20; 20) = 20$. Теперь вычеркиваются первая строка и пятый столбец. Далее полагаем $x_{34} = \min(50, 60) = 50$ и вычеркиваем третью строку. Четвертому потребителю требуется доставить еще 10 единиц товара. В матрице остались невычеркнутыми вторая, третья, четвертая клетки второй строки. Минимальная стоимость в невычеркнутых клетках равна 4 (c_{22}). Полагаем $x_{22} = 40$. Затем полагаем $x_{23} = 20$, $x_{24} = 10$.

Отметим одно очевидное свойство решений, получаемых по методу северо-западного угла и минимальной стоимости. В матрице перевозок, в которой стоит решение, полученное одним из этих методов, всегда есть строка (столбец) с единственной ненулевой перевозкой. После вычеркивания этой строки (столбца) вновь появляется строка (столбец) с единственной ненулевой перевозкой. Так будет до тех пор, пока в матрице остаются невычеркнутые строки и столбцы. Это свойство будет использовано в дальнейшем.

6.3. Задача, двойственная к ТЗ. Соотношения двойственности и

описание метода потенциалов

Математическая модель двойственной задачи. Построим задачу, двойственную к ТЗ. Начнем с простого примера. Пусть $m = 2$, $n = 3$, а сама модель следующая:

$$Z = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1 ;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2 ;$$

$$x_{11} + x_{21} = b_1 ; \quad x_{12} + x_{22} = b_2 ;$$

$$x_{13} + x_{23} = b_3 ;$$

$$x_{11}, \dots, x_{23} \geq 0 .$$

Дадим переменным сквозную нумерацию ($x_{11} = x_1$, $x_{12} = x_2$, $x_{13} = x_3$, $x_{21} = x_4$, $x_{22} = x_5$, $x_{23} = x_6$) и запишем систему ограничений так, чтобы в j -м столбце стояла переменная x_j , $j = 1, 2, 3$.

Затем построим математическую модель двойственной задачи.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \rightarrow \min ;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = a_1 ; \quad (u_1)$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = a_2 ; \quad (u_2)$$

$$x_1 + x_4 = b_1 ; \quad (v_1)$$

$$x_2 + x_5 = b_2 ; \quad (v_2)$$

$$x_3 + x_6 = b_3 . \quad (v_3)$$

Двойственные переменные, соответствующие ограничениям по запасам, традиционно обозначаются буквой u . Двойственные переменные, соответствующие ограничениям по потребностям, обозначаются буквой v . В нашем случае получились две двойственные переменные u : u_1 и u_2 ; три двойственные переменные v : v_1 , v_2 , v_3 . Ограничений в двойственной задаче 6, а ее математическая модель такова:

$$W = a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \rightarrow \max ;$$

$$u_1 + v_1 \leq c_{11} ;$$

$$u_1 + v_2 \leq c_{12} ;$$

$$u_1 + v_3 \leq c_{13} ;$$

$$u_2 + v_1 \leq c_{21} ;$$

$$u_2 + v_2 \leq c_{22} ;$$

$$u_2 + v_3 \leq c_{23} .$$

Условия неотрицательности на двойственные переменные не накладываются, ведь все ограничения транспортной задачи – это ограничения-равенства.

Рассмотренный пример легко обобщить. В общем случае в двойственной задаче $m + n$ переменных (в транспортной задаче $m + n$ ограничений: m ограничений по запасам и n ограничений по потребностям): $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$. В двойственной задаче $m \times n$ ограничений (в транспортной задаче $m \times n$ переменных). Нужно максимизировать целевую функцию

$$W = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \quad (6.5)$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \leq c_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

Соотношения двойственности и описание метода потенциалов.

Для пары двойственных задач (6.1) – (6.4) и (6.5) – (6.6) условия дополняющей нежесткости формулируются следующим образом.

Допустимые решения $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ и $\bar{y} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ двойственной пары (6.1) – (6.4) и (6.5) – (6.6) оптимальны тогда и только тогда, когда справедливы равенства:

$$x_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.7)$$

Пусть имеется некоторое допустимое решение $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ транспортной задачи. Определим значения $m + n$ неизвестных $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$, они называются **потенциалами**, решая систему уравнений, полученную из условий дополняющей нежесткости.

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0. \quad (6.8)$$

В случае, когда найденные значения $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ удовлетворяют **всем** ограничениям (6.6) двойственной задачи ($u_i + v_j \leq c_{ij}; j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m$), имеющееся решение $\bar{x}$ оптимально. В противном случае его нужно улучшать, перейти к новому допустимому решению $\bar{x}_1$, на котором целевая функция ТЗ меньше, чем на векторе $\bar{x}$. Для вектора $\bar{x}_1$ снова нужно вычислить значения потенциалов и проверить их на допустимость системе ограничений (6.6). В конце концов, будет найдено оптимальное решение ТЗ параллельно с оптимальным решением двойственной задачи.

Проверим на оптимальность решение, найденное по методу северо-западного угла. Оно заведомо не оптимально, по методу минимальной стоимости построено решение с меньшим значением целевой функции.

Так как ненулевых перевозок 7: $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35} > 0$, то для определения восьми неизвестных потенциалов имеется семь уравнений: $u_1 + v_1 = 2$;

$$u_1 + v_2 = 7;$$

$$u_2 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = 5;$$

$$u_2 + v_4 = 7;$$

$$u_3 + v_4 = 2;$$

$$u_3 + v_5 = 4.$$

Метод северо-западного угла и метод минимальной стоимости позволяют получить не более чем $m + n - 1$ ненулевых перевозок: всего в матрице $m + n$ строк и столбцов, на каждом шаге вычеркивается или строка, или столбец, или и то и другое, а на последнем шаге обязательно, вследствие закрытости задачи, вычеркиваются и строка, и столбец. Таким образом, один из потенциалов можно положить равным любому числу, проще всего – нулю. Положим, например, $u_2 = 0$. Для дальнейшего расчета потенциалов удобно использовать матрицу перевозок.

Если $u_2 = 0$, то $v_2 = 4 - u_2 = 4 - 0 = 4$; $v_3 = 5 - u_2 = 5$; $v_4 = 7 - u_2 = 7$. Далее, $u_1 = 7 - v_2 = 7 - 4 = 3$; $v_1 = 2 - u_1 = 2 - 3 = -1$; $u_3 = 2 - v_4 = 2 - 7 = -5$; $v_5 = 4 - u_3 = 4 - (-5) = 9$. Мы удовлетворили всем условиям дополняющей нежесткости. Найдем для каждой незанятой клетки сумму соответствующих потенциалов и сравним ее со стоимостью, записанной в этой клетке.

$$u_1 + v_3 = 3 + 5 > 3 = c_{13}; \quad u_1 + v_4 = 3 + 7 > 6 = c_{14}; \quad u_1 + v_5 = 3 + 9 > 2 = c_{15};$$

$$u_2 + v_1 = 0 + (-1) < 6 = c_{21}; \quad u_2 + v_5 = 0 + 9 > 3 = c_{25};$$

$$u_3 + v_1 = (-5) + (-1) < 5 = c_{31}; \quad u_3 + v_2 = (-5) + 4 < 7 = c_{32};$$

$$u_3 + v_3 = (-5) + 5 < 6 = c_{33}.$$

Ограничения двойственной задачи нарушаются четыре раза. Соответствующие клетки называются **потенциальными**, в матрице они отмечены знаком «•» (табл. 6.5).

Таблица 6.5

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	u_i
30	2 10	7 20	• 3	• 6	• 2	3
70	9	4 20	5 20	7 30	• 3	0

50	5	7	6	30 ²	20 ⁴	−5
v_j	−1	4	5	7	9	

Проверим на оптимальность решение, полученное по методу минимальной стоимости (табл. 6.6).

Таблица 6.6

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	u_i
30	10 ²	7	0 ³	6	20 ²	−2
70	9	40 ⁴	20 ⁵	10 ⁷	• 3	0
50	5	7	6	50 ²	4	−5
v_j	4	4	5	7	4	

В этой матрице всего 6 ненулевых перевозок. Для определения восьми неизвестных потенциалов имеется всего 6 уравнений.

$$u_1 + v_2 = 2;$$

$$u_1 + v_5 = 2;$$

$$u_2 + v_2 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = 5;$$

$$u_2 + v_4 = 7;$$

$$u_3 + v_4 = 2.$$

Пусть $u_2 = 0$, тогда $v_2 = 4$, $v_3 = 5$, $v_4 = 7$, $v_4 = u_3 - c_{34} = 2 - 7 = -5$. Цепочка расчета потенциалов оборвалась, не хватает одного условия. Запишем в матрице явно еще одну перевозку, хотя ее значение и равно 0, так, чтобы восстановить оборванную цепочку расчетов, добавить недостающее условие дополняющей нежесткости. Нулевую перевозку нужно проставить в любой клетке, для которой один потенциал известен, а другой – неизвестен. Значение неизвестного потенциала находится из условия дополняющей нежесткости, как будто в клетке стоит ненулевая перевозка. Например, занесем нулевую перевозку в клетку (1; 3). Теперь эта клетка считается занятой, для нее должно выполняться равенство $u_1 +$

$+ v_3 = c_{13}$. Значение потенциала v_3 известно, поэтому значение u_1 можно найти: $u_1 = c_{13} - v_3 = 3 - 5 = -2$.

Появление этого нуля можно обосновать и так. На втором шаге пришлось вычеркнуть и первую строку, и пятый столбец (именно из-за этого и «потерялось» одно условие дополняющей нежесткости). Вычеркнем только пятый столбец, а первую строку оставим (хотя запасы первого поставщика равны 0). Тогда еще через шаг в клетку с минимальной стоимостью 3 заносится нулевая перевозка и вычеркивается первая строка. Ясно, что подобный прием позволяет и в случае применения метода северо-западного угла, и для метода минимальной стоимости *всегда* вычеркивать на промежуточных шагах только строку или столбец. На последнем шаге вычеркнутся и строка, и столбец, а в матрице окажется $m + n - 1$ занятых клеток. Быть может, в некоторых из них будут стоять нулевые перевозки.

Далее находятся потенциалы v_1 ($v_1 = c_{11} - u_1 = 2 - (-2) = 4$) и v_5 ($v_5 = c_{15} - u_1 = 2 - (-2) = 4$). Проверка на соответствие системе ограничений двойственной задачи показывает, что нарушается условие $u_2 + v_5 < c_{25}$, так как $0 + 4 > 3$ (см. табл. 6.6). И это решение не оптимально.

Ниже будет указан способ улучшения неоптимального решения транспортной задачи.

6.4. Циклы в матрице

Определение цикла. Циклом будем называть замкнутую ломаную линию, вершины которой лежат в клетках матрицы, а звенья расположены вдоль строк и столбцов, причем из каждой вершины выходят ровно два звена – одно вдоль строки, другое вдоль столбца. Вершины цикла, соединенные звеном, называют **смежными**. Примеры циклов приведены на рис. 6.1.

Из определения цикла следует, что звенья могут пересекаться, но только не в вершинах.

Свойства циклов.

1. В каждой строке (столбце) матрицы лежит четное число вершин цикла. Это следует из того, что у каждой вершины цикла есть ровно одна вершина, смежная с ней и расположенная в той же строке (столбце). Поэтому в каждой строке (столбце) матрицы вершины цикла разбиваются на непересекающиеся пары смежных вершин.

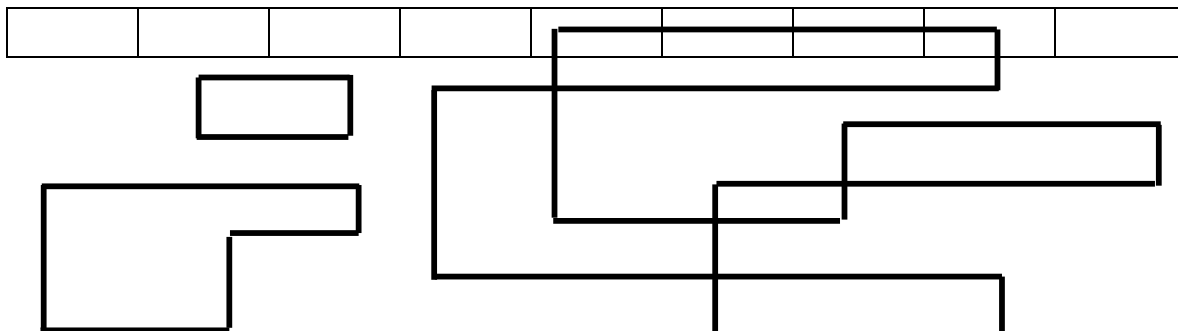


Рис. 6.1

2. Число вершин цикла чётно. Это свойство непосредственно следует из свойства 1.
3. Если в матрице с m строками и n столбцами ($m, n \geq 2$) произвольно отмечены $m + n$ клеток, то существует цикл, все вершины которого лежат в отмеченных клетках.

Доказательство проведем методом математической индукции по числу $l = m + n$.

База индукции. Если $l = 4$ ($m = 2, n = 2$), цикл очевиден.

Индуктивное предположение. Пусть утверждение верно для всех l , не превосходящих некоторого числа k .

Индуктивный переход. Рассмотрим произвольную матрицу, в которой всего $k + 1$ строк и столбцов. Возможны два случая.

а) В матрице есть строка (столбец), в которой (котором) лежит не более одной отмеченной клетки. Мысленно удалив эту строку (столбец), получим матрицу с k строками и столбцами, в которой отмечены не менее k клеток. По предположению индукции в такой матрице строится цикл.

б) В каждой строке (столбце) матрицы лежит не менее двух отмеченных клеток. (Несущественное замечание: случай б) возможен тогда, когда $m = n$, а в каждой строке (столбце) лежат ровно две отмеченные клетки).

Выберем произвольную отмеченную клетку. В строке, в которой она лежит, есть еще отмеченная клетка, перейдем в нее. В столбце, куда мы перешли, есть еще одна отмеченная клетка, перейдем в нее. В строке, в которую мы попали, есть еще одна отмеченная клетка, перейдем в нее. В конце концов мы первый раз попадем в столбец, из которого начинали движение, а это и означает построение цикла (рис. 6.2), клетки отмечены знаком «Υ».

Υ				Υ		
	Υ	Υ				

		Υ			Υ
			Υ		Υ
Υ			Υ		
	Υ			Υ	

Рис. 6.2

4. Пусть в матрице отмечены k клеток так, что нельзя построить цикл, все вершины которого лежат в отмеченных клетках. Пусть к этим клеткам (позначим их знаком «Υ») добавлена еще одна (позначим ее знаком «√»), такая, что теперь цикл, все вершины которого лежат в отмеченных клетках, строится. Тогда:

а) Этот цикл единственен.

б) Если снять метку «Υ» с любой из клеток, в которой лежат вершины этого цикла, то снова нельзя построить цикл с вершинами, лежащими только в отмеченных клетках.

Единственность цикла доказывается от противного. Если бы можно построить два цикла – C_1 и C_2 , то, прочеркнув вершину, отмеченную знаком «√» и, удалив, если это требуется, лишние звенья, получим цикл, все вершины которого лежат только в клетках, отмеченных знаком «Υ» (рис. 6.3), что противоречит исходному условию.

Из единственности цикла следует утверждение б).

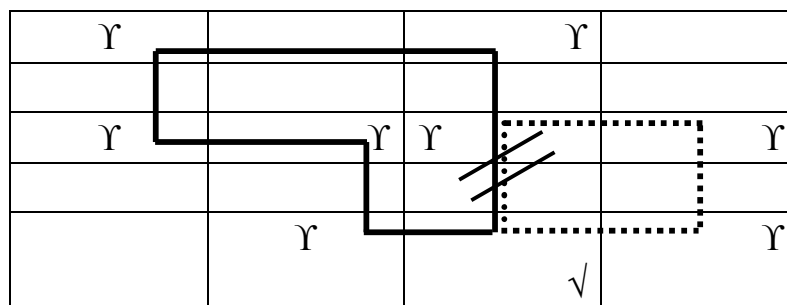


Рис. 6.3

5. Выберем произвольную вершину цикла и отметим ее знаком «+». Перейдем по строке (столбцу) в смежную вершину и отметим ее знаком «-». Обходя последовательно вершины цикла, припишем им поочередно знаки «+» и «-», пока не пометим все вершины (рис. 6.4). Число вершин в цикле четно, противоречия при расстановке знаков не случится. Любая пара смежных вершин окажется помеченной разными знаками, поэтому в любой строке (столбце) матрицы число вершин цикла, которым приписан знак

«+», равно числу вершин цикла, которым приписан знак «-». Цикл, вершины которого помечены описанным способом, называется **означенным циклом**.

+		-	-		+
		+			-
-			+		

Рис. 6.4

Циклы в матрице перевозок транспортной задачи.

Рассмотрим матрицу перевозок транспортной задачи, в которой стоит допустимое решение ТЗ, состоящее из $m + n - 1$ перевозок. Некоторые из перевозок могут быть нулевыми. Клетки матрицы перевозок с явно указанными перевозками назовем **занятыми**, остальные клетки назовем **свободными**.

Если в матрице перевозок стоит допустимое решение ТЗ, полученное методом северо-западного угла или методом минимальной стоимости, *то нельзя построить цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках*.

Действительно, в силу указанного в параграфе 6.2 свойства таких решений, в матрице перевозок существует строка (столбец), в которой (котором) лежит только одна занятая клетка. В такой строке (столбце) нельзя поместить вершину цикла. После вычеркивания этой строки (столбца) в матрице вновь появляется строка (столбец) с единственной перевозкой. И в этой строке (столбце) не может лежать вершина цикла. В результате окажутся вычеркнутыми все строки и столбцы матрицы, места для цикла нет.

Цикл пересчета. Циклом пересчета называется означенный цикл, построенный в матрице перевозок ТЗ. Все вершины цикла, кроме одной, лежат в занятых клетках, и только одна вершина, причем помеченная знаком «+», лежит в свободной клетке. Пример цикла пересчета показан в табл. 6.7. Свободная клетка – (1, 5).

Таблица 6.7

b_j	10	40	20	60	20
a_i					
30	2	7	3	6	2
	10	20			+

70	9	4 20 +	5 20	7 30 –	3
50	5	7	6	2 30 +	4 20 –

Сдвигом по циклу пересчета на число x называется следующая операция. Ко всем перевозкам, стоящим в клетках, содержащих вершины цикла со знаком «+», прибавляется число x . Из всех перевозок, стоящих в клетках, содержащих вершины цикла со знаком «–», вычитается число x . Значит, чтобы перевозки остались неотрицательными, число x не должно превышать минимальной из перевозок, отмеченных знаком «–».

После сдвига по приведенному в табл. 6.7 циклу пересчета на число 10 получится матрица перевозок, приведенная в табл. 6.8.

Сдвиг по циклу переводит допустимое решение ТЗ в другое допустимое решение. Это вытекает из свойства 5 циклов (параграф 6.4): в каждой строке (столбце) матрицы лежит одинаковое число вершин цикла пересчета, отмеченное знаками «+» и «–», сумма перевозок, стоящих в каждой строке (столбце), не меняется после сдвига по циклу. Это и означает допустимость нового решения (сумма перевозок в i -й строке равна запасам i -го поставщика; сумма перевозок в j -м столбце равна потребности j -го потребителя, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Таблица 6.8

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20
30	2 10	7 10	3	6	2 10
70	9	4 30	5 20	7 20	3
50	5	7	6	2 40	4 10

В дальнейшем всегда будем проводить сдвиги только на максимально возможную величину. Вследствие такого сдвига одна из занятых ранее клеток станет свободной, так что в матрице вновь будет $m + n - 1$ занятых клеток.

Для решения из табл. 6.7 максимальная величина сдвига равна $x = \min(20; 20) = 20$, сразу две перевозки обратятся в 0. Чтобы число

занятых клеток по-прежнему было равно 7, проставим явно нулевую перевозку в одной из освободившихся клеток. Пусть это будет клетка с меньшей стоимостью $c_{35} = 4$. Результаты сдвига показаны в табл. 6.9.

Таблица 6.9

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20
30	2 10	7	3	6	2 20
70	9	4 40	5 20	7 10	3
50	5	7	6	2 50	4 0

Новое значение целевой функции равно:

$$Z = 2 \times 10 + 2 \times 20 + 4 \div 40 + 5 \times 20 + 7 \times 10 + 2 \times 50 = 490.$$

Целевая функция уменьшилась на 200 единиц.

Из свойства 4 циклов (параграф 6.4) следует, что если в матрице перевозок стоит такое допустимое решение ТЗ, что нельзя построить цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках, после сдвига по циклу пересчета цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках, вновь не строится.

Начнем с матрицы перевозок с допустимым решением, построенным по методу северо-западного угла или минимальной стоимости. Если это решение окажется неоптимальным, будем его улучшать, уменьшать значение целевой функции ТЗ, проводя сдвиг по циклу пересчета. Всякий раз в матрице перевозок окажется допустимое решение с $m + n - 1$ перевозками (некоторые могут равняться 0).

Из всего сказанного вытекает, что цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках, построить нельзя. Но если добавить любую свободную клетку, становится возможным построить единственный цикл пересчета, одна из вершин которого лежит в добавленной свободной клетке.

Теорема об изменении значения целевой функции ТЗ при сдвиге по циклу пересчета. Только что мы видели, как после сдвига по циклу значение функции Z уменьшилось на 200 единиц. Наша цель – вывод формулы, по которой можно рассчитать изменение значения целевой функции.

Пусть в матрице перевозок стоит допустимое значение ТЗ. Кроме того, исходя из условий дополняющей нежесткости, рассчитаны потенциалы $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$; $u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$ или если $x_{ij} = 0$, но нулевая перевозка x_{ij} явно указана. Выберем произвольную свободную клетку (i, j) , построим для нее цикл пересчета и произведем сдвиг по циклу на величину x . *Изменение целевой функции Z на новом допустимом решении ТЗ в сравнении со старым равно*

$$\Delta Z = x(c_{ij} - u_i - v_j). \quad (6.9)$$

Таким образом, если клетка i, j – потенциальная, $u_i + v_j > c_{ij}$, целевая функция Z уменьшится в результате сдвига по циклу. Докажем формулу (6.9).

Обойдем построенный цикл пересчета, начиная со свободной клетки (i, j) . Выпишем номера строк и столбцов клеток, в которых лежат вершины цикла. Если выйти из клетки i, j , например, по строке, то вернемся в нее по столбцу. Одновременно покажем знаки вершин.

$$\begin{aligned} &^+(i, j) \rightarrow ^-(i, j_1) \rightarrow ^+(i_1, j_1) \rightarrow ^-(i_1, j_2) \rightarrow ^+(i_2, j_2) \rightarrow \dots \rightarrow \\ &\rightarrow ^+(i_k, j_k) \rightarrow ^-(i_k, j) \rightarrow ^+(i, j). \end{aligned}$$

Изменение целевой функции Z после сдвига по циклу равно

$$\Delta Z = x(c_{ij} - c_{ij_1} + c_{i_1 j_1} - c_{i_1 j_2} + c_{i_2 j_2} - \dots + c_{i_k j_k} - c_{i_k j}), \quad (6.10)$$

ведь в соответствии с правилами сдвига, перевозки, отмеченные знаком «+», увеличиваются на x , перевозки, отмеченные знаком «-», уменьшаются на x .

Все пройденные вершины цикла пересчета, кроме вершины (i, j) , лежат в занятых клетках. По условиям дополняющей нежесткости

$$\begin{aligned} c_{ij_1} &= u_i + v_{j_1}; \\ c_{i_1 j_1} &= u_{i_1} + v_{j_1}; \\ &\dots\dots\dots; \\ c_{i_k j_k} &= u_{i_k} + v_{j_k}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подставляя формулы (6.11) в (6.10), получим

$$\begin{aligned} \Delta Z &= x(c_{ij} - u_i - v_{j_1} + v_{j_1} + u_{i_1} - u_{i_1} - v_{j_2} + v_{j_2} + u_{i_2} - \dots + \\ &+ v_{j_k} + u_{i_k} - u_{i_k} - v_j) = x(c_{ij} - u_i - v_j). \end{aligned}$$

В рассмотренном примере клетка (1, 5) была потенциальной: $u_1 = 3$; $v_5 = 9$; $c_{15} = 2$. Величина сдвига $x = 20$; $\Delta Z = 20(2 - 3 - 9) = -200$. Как уже было сказано, целевая функция Z уменьшилась на 200 единиц.

Проверим на оптимальность вновь полученное решение (табл. 6.10).

Таблица 6.10

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	u_i
30	2 10	7	3	6 20	2	-7
70	9	4 40	5 20	7 10 -	3 +	0
50	5	7	6	2 50 +	4 - 0	-5
v_j	9	4	5	7	9	

Положим $u_2 = 0$, тогда $v_2 = 4$; $v_3 = 5$; $v_4 = 7$; $u_3 = c_{34} - v_4 = 2 - 7 = -5$; $v_5 = c_{35} - u_3 = 4 - (-5) = 9$; $u_1 = c_{15} - v_5 = 2 - 9 = -7$; $v_1 = c_{11} - u_1 = 2 - (-7) = 9$.

В матрице имеется единственная потенциальная клетка – (2, 5), так как $c_{25} = 3 < u_2 + v_5 = 0 + 9 = 9$. Построим для нее цикл пересчета. Так случилось, что в одной из вершин, помеченных знаком «-», стоит нулевая перевозка. Сдвиг можно произвести только на величину $x = 0$. Изменения целевой функции не будет, $\Delta Z = 0(3 - 9) = 0$. Но после сдвига нулевая перевозка переместится во вторую строку (табл. 6.11). Проверим на оптимальность новое решение.

Таблица 6.11

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	u_i
30	2 10	7	• + 3	6	- 2 20	-1
70	9	4 40	5 20 -	7 10	3 + 0	0
50	5	7	6	2 50	4	-5

v_j	3	4	5	7	3	
-------	---	---	---	---	---	--

Если $u_2 = 0$, то $v_2 = 4$; $v_3 = 5$; $v_4 = 7$; $v_5 = 3$; $u_1 = c_{15} - v_5 = 2 - 3 = -1$; $u_3 = c_{34} - v_4 = 2 - 7 = -5$; $v_1 = c_{11} - u_1 = 2 - (-1) = 3$. Клетка (1, 3) – потенциальная, $c_{13} = 3 > u_1 + v_3 = (-1) + 5 = 4$.

Построим для потенциальной клетки цикл пересчета. Можно произвести сдвиг по циклу на величину $x = 20$. Оставим нулевую перевозку в клетке (1, 5) ($c_{15} = 2 < c_{23} = 5$) клетка (2, 3) станет свободной (табл. 6.12). Новое значение целевой функции равно 470, она уменьшилась на 20 единиц, $\Delta Z = 20(3 - (-1) - 5) = 20(-1) = -20$.

Таблица 6.12

$a_i \backslash b_j$	10	40	20	60	20	u_i
30	2 10	7	3 20	6	2 0	-1
70	9	4 40	5	7 10	3 20	0
50	5	7	6	2 50	4	-5
v_j	3	4	4	7	3	

Потенциальных клеток больше нет, выполнены условия второй теоремы двойственности.

Оптимальные значения переменных:

$$x_{11} = 10; x_{13} = 20; x_{22} = 40; x_{24} = 10; x_{25} = 20; x_{34} = 50;$$

$$Z = 2 \times 10 + 3 \times 20 + 4 \times 40 + 7 \times 10 + 3 \times 20 + 2 \times 50 = 470.$$

6.5. Описание метода потенциалов

Чтобы решить ТЗ методом потенциалов, нужно выполнить следующие действия.

1. Определить исходное допустимое решение ТЗ по методу северо-западного угла или минимальной стоимости. В этом решении должны быть заданы $m + n - 1$ перевозок, некоторые из них могут равняться 0.

2. В соответствии с условиями дополняющей нежесткости рассчитать значения $m + n$ потенциалов $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ по правилу $u_i + v_j = c_{ij}$, если клетка (i, j) занята перевозкой.
3. Проверить, удовлетворяют ли найденные значения потенциалов системе ограничений задачи, двойственной к транспортной: $u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Если это так, то вектор $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ и вектор $\bar{y} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ – оптимальные решения соответственно ТЗ и двойственной задачи. В противном случае перейти к шагу 4.
4. Выбрать любую потенциальную клетку (i, j) (такую клетку, что для нее $u_i + v_j > c_{ij}$) и построить для выбранной клетки цикл пересчета. Произвести сдвиг по циклу на величину $x = \min(x_{kl}^-)$, где x_{kl}^- – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком «–». После сдвига по циклу значение целевой функции ТЗ уменьшится на величину $\Delta Z = x(c_{ij} - u_i - v_j)$. Перейти к шагу 2.

6.6. Еще один пример (блокирование перевозок)

Решим такую транспортную задачу (табл. 6.12.) при дополнительном условии, что все запасы третьего поставщика должны быть полностью вывезены.

Таблица 6.12

$a_i \backslash b_j$	40	30	20	50
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
50	8	4	2	5

Эта задача открыта, $\sum_{i=1}^3 a_i = 180$; $\sum_{j=1}^4 b_j = 140$. Нужно добавить еще одного потребителя с потребностью $b_5 = 180 - 140 = 40$. Дополнительное условие означает, что третий поставщик не может поставлять товар

фиктивному потребителю, поэтому $c_{15} = c_{25} = 0$; $c_{35} = \infty$. Если существуют такие допустимые решения нашей ТЗ, что $x_{35} = 0$, то оптимальное решение – одно из них (когда $x_{35} > 0$, $Z = \infty$). После закрытия задачи матрица перевозок примет вид (табл. 6.14)

Таблица 6.14

$a_i \backslash b_j$	40	30	20	50	40
60	2	4	5	1	0
70	2	3	9	4	0
50	8	4	2	5	∞

Найдем исходное допустимое решение по методу минимальной стоимости и проверим его на оптимальность (табл. 6.15).

Целевая функция равна $Z = 20 + 80 + 90 + 40 + 150 = 380$.

После расчета потенциалов выясняется, что в матрице имеется одна потенциальная клетка – (2, 5), так как $u_2 = 3$, $v_5 = 0$, $u_2 + v_5 = 3$, $c_{25} = 0 < 3$. Построим для этой клетки цикл пересчета. Величина сдвига $x = 30$; $\Delta Z = 30(-3) = -90$. Проверим на оптимальность новое решение (табл. 6.16).

Таблица 6.15

$a_i \backslash b_j$	40	30	20	50	40	u_i
60	2	4	5	1	0	0
70	2	3	9	4	0	3
50	8	4	2	5	∞	4
v_j	-1	0	-2	1	0	

Таблица 6.16

$a_i \backslash b_j$	40	30	20	50	40	u_i
----------------------	----	----	----	----	----	-------

$a_i \backslash$						
60	2	4	5	1	0	0
70	2	3	9	4	0	0
50	8	4	2	5	∞	1
v_j	2	3	1	1	0	

Потенциальных клеток больше нет, $Z = 380 - 90 = 50 + 80 + 120 + 40 = 290$. Оптимальные значения перевозок: $x_{14} = 50$; $x_{21} = 40$; $x_{32} = 30$; $x_{33} = 20$. Неиспользованными остались 10 единиц запасов первого поставщика и 30 единиц запасов второго.

Оптимальные значения переменных двойственной задачи:

$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = 1; \quad v_1 = 2; \quad v_2 = 3; \quad v_3 = v_4 = 1; \quad v_5 = 0;$$

$$W_{\max} = \sum_{i=1}^3 a_i u_i + \sum_{j=1}^5 b_j v_j = 50 + 80 + 90 + 20 + 50 = 290 = Z_{\min}.$$

6.7. Задачи

В упражнениях 1 – 14 ТЗ заданы матрицей перевозок, стоимости указаны в центре клеток. Записать математические модели пары двойственных задач и решить эти задачи. Для получения начального решения использовать методы северо-западного угла и минимальной стоимости. Можно ли утверждать, что использование метода минимальной стоимости уменьшает количество итераций?

1.

$a_i \backslash b_j$	80	140	110
100	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6

2.

$a_i \backslash b_j$	80	60	90
70	3	7	5
100	2	5	3
30	4	7	6

3.

4.

$a_i \backslash b_j$	90	30	70	50
110	5	2	3	8
50	3	4	7	2
80	6	5	3	4

$a_i \backslash b_j$	10	11	8	6
12	7	3	5	8
5	5	10	6	4
18	1	4	3	7

5.

$a_i \backslash b_j$	30	70	20	60	40	30
100	7	3	8	4	5	2
60	5	7	3	8	4	6
40	3	8	4	2	6	9
50	1	6	7	5	3	4

6.

$a_i \backslash b_j$	30	90	80	20	30
120	2	8	4	6	3
30	3	2	5	2	6
40	6	5	8	7	4
60	3	4	4	2	1

7.

$a_i \backslash b_j$	100	50	30	80	100	90
130	2	3	6	8	2	10
90	8	1	2	3	5	6
100	7	4	4	1	4	8
140	2	8	5	1	3	6

8.

$a_i \backslash b_j$	180	350	20
110	7	1	6
90	12	8	3
120	4	6	8
50	6	5	7
180	5	3	4

9.

$a_i \backslash b_j$	130	220	60	150
120	1	7	9	5
280	4	2	6	8
160	3	8	1	2

10.

$a_i \backslash b_j$	4	9	9	13
8	4	3	3	1
11	3	2	4	8
16	5	4	6	3

11.

$a_i \backslash b_j$	9	10	11
12	5	1	8
14	2	4	6
4	3	6	7

12.

$a_i \backslash b_j$	150	250	120	180
----------------------	-----	-----	-----	-----

$a_i \backslash b_j$				
180	18	2	3	12
160	3	4	8	7
140	4	5	6	12
220	7	1	5	6

13.

$a_i \backslash b_j$	10	20	30	40	50
60	10	15	9	7	8
60	12	7	20	5	9
20	14	3	12	7	19

14.

$a_i \backslash b_j$	6	4	10	13	7	10
9	2	9	3	10	8	7
14	3	2	6	3	5	2
16	1	8	2	4	1	5
11	4	8	7	6	6	6

15. Компания запланировала перемещения нескольких служащих на новые должности в соответствии с пересмотренным штатным расписанием. Служащие, которых эта реформа затрагивает, по квалификации и опыту разделены на пять групп – S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , включающих соответственно 2, 5, 4, 8 и 6 служащих. Подобным образом каждая должность отнесена к одной из четырех групп – P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , содержащих 8, 3, 9 и 5 должностей соответственно. В таблице указано, какие группы служащих обладают достаточной квалификацией для занятия соответствующих должностей.

Должность	Группа				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
P_1		+		+	
P_2				+	+
P_3	+			+	
P_4	+	+	+		+

Можно ли обеспечить работой каждого служащего? Сформулировать задачу как транспортную и показать, что удовлетворительного решения нет. Какое максимальное число служащих можно обеспечить работой? Можно ли ограничить все невыполненные назначения группой S_4 ?

16. Дана ТЗ с тремя поставщиками и тремя потребителями. Запасы поставщиков и потребности потребителей равны соответственно $a_1 = 15$; $a_2 = 30$; $a_3 = 85$; $b_1 = 20$; $b_2 = 30$; $b_3 = 80$. Известно, что начальное решение, полученное по методу северо-западного угла, является оптимальным. Известно также оптимальное решение двойственной задачи: $u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $v_1 = 2$; $v_2 = 5$; $v_3 = 10$. Найти минимальные суммарные транспортные расходы и минимальные значения стоимостей c_{ij} для незанятых клеток, при которых решение остается оптимальным.

17. Для следующей ТЗ задано ее оптимальное решение и оптимальные значения двойственных переменных.

$a_i \backslash b_j$	10	20	20	u_i
10	10			1
40		20	20	0
v_j	-1	2	3	

1. Найти двумя способами $Z_{\min}$.
2. Если известно, что стоимости в клетках с нулевыми перевозками определяются формулой $c_{ij} = i + j\theta$, где $\theta > 0$. Найти θ , c_{12} , c_{13} , c_{21} .

Задачи 18 – 21 нужно решить симплекс-методом и методом потенциалов. Показать, что между итерациями этих методов существует взаимно однозначное соответствие. Начальное решение искать по методу северо-западного угла.

18.

$a_i \backslash b_j$	4	6	10
3	1	3	2
5	3	5	4
12	1	2	3

19.

$a_i \backslash b_j$	40	25
10	7	3
35	2	8
20	4	9

20.

$a_i \backslash b_j$	40	90
70	7	4
45	5	9
15	3	8

21.

$a_i \backslash b_j$	40	60
20	6	3
70	4	5
10	2	7

22. Решить данную ТЗ при условии полного удовлетворения потребности первого потребителя.

$a_i \backslash b_j$	40	35	30	45
46	4	3	2	7
34	1	1	6	4
40	3	5	9	4

23. Решить данную ТЗ при условии вывоза всех запасов первого и четвертого поставщиков.

$a_i \backslash b_j$	16	18	12	15
20	2	3	9	7
16	3	4	6	1
14	5	1	2	2
22	4	5	8	1

24. Решить данную ТЗ при условии полного удовлетворения потребностей четвертого и шестого потребителей.

25. Найти решение данной ТЗ при дополнительных условиях: запрещены перевозки от первого поставщика второму потребителю и от второго поставщика пятому потребителю. Второй поставщик должен поставить первому потребителю 60 ед. товара.

$a_i \backslash b_j$	120	80	160	90	50
----------------------	-----	----	-----	----	----

180	1	2	3	1	4
220	6	3	4	5	2
100	8	2	1	9	3

26. Решить задачу 25 при следующих дополнительных условиях: первый поставщик должен поставить второму потребителю не менее 50 ед. товара; третий поставщик должен поставить пятому потребителю не менее 60 ед. товара; второй поставщик должен поставить четвертому потребителю не более 40 ед. товара.

27. Три нефтеперерабатывающих завода с максимальной производительностью в 24, 20 и 32 млн литров бензина снабжают три бензохранилища, спрос которых составляет 16, 32, 28 млн литров. Бензин транспортируется по трубопроводу. Стоимость перекачки бензина на 1 км составляет 1 денежную единицу на 200 литров. Ниже приведена таблица расстояний, из которой следует, что завод 1 не связан с хранилищем 3. Решить соответствующую ТЗ. Расстояния даны в километрах.

Заводы	Бензохранилища		
	1	2	3
1	240	360	—
2	600	200	160
3	400	500	240

28. В условиях задачи 27 производительность завода 3 снизилась до 24 млн литров. Обязательно полное удовлетворение потребности бензохранилища 1. За неудовлетворенный спрос бензохранилищ 2 и 3 платится штраф в размере 1,25 денежной единицы за каждый недопоставленный литр. Решить соответствующую ТЗ.

29. В условиях задачи 27 спрос хранилища 3 уменьшился до 10 млн литров. Избыток продукции на заводах 1 и 2 переправляется на грузовиках в другие хранилища. Средние транспортные издержки составляют 40 денежных единиц за 100 литров при перевозке с завода 1 и 55 единиц при перевозке с завода 2. Завод 3 использует избыток бензина для нужд своего химического производства. Решить соответствующую ТЗ.

30. В данной ТЗ суммарные потребности превышают суммарные запасы. Штрафы за недопоставку единицы товара потребителям 1, 2, 3 равны 5, 3, 2 денежные единицы соответственно. Решить ТЗ.

b_j	75	20	50
a_i			

10	5	1	7
80	6	4	6
15	3	2	5

31. В следующей открытой ТЗ вводится дополнительное условие выплаты штрафа за каждую невывезенную единицу груза. Величина штрафа для поставщиков 1, 2, 3 равна 5, 4 и 3 денежные единицы соответственно. Найти оптимальное решение, если все запасы поставщика 2 должны быть вывезены.

$a_i \backslash b_j$	30	20	20
20	1	2	1
40	1	4	5
30	2	3	2

32. Две фабрики F_1 и F_2 в течение некоторого периода выпускают 16 и 12 тыс. изделий соответственно при нормальных темпах производства. Использование сверхурочных работ позволяет дополнительно изготовить 4 тыс. изделий на фабрике F_1 и 2 тыс. изделий на F_2 . Дополнительная стоимость производства 100 изделий в сверхурочное время на F_1 и F_2 равна 8 денежным единицам. Фабрики снабжают трех потребителей, потребности которых в течение этого же периода равны 10, 13 и 7 тыс. изделий. Стоимости перевозок 1 тыс. изделий каждому потребителю с каждой из фабрик приведены в таблице.

Фабрика	Потребитель		
	1	2	3
F_1	5	4	6
F_2	6	3	2

Сформулировать задачу определения оптимальных планов производства и распределения продукции как транспортную и решить ее.

33. Некоторый продукт производится на двух заводах и распределяется между двумя пользователями. Их потребности на ближайшие два месяца приведены в таблице.

Пользователь	Потребность	
	Август	Сентябрь

1	420	550
2	350	480

Стоимости транспортировки продукта от заводов потребителям приведены в таблице.

Завод	Пользователь	
	1	2
1	10	13
2	12	6

Стоимости производства единицы продукта и объемы производства за два месяца приведены в таблице.

Завод	Стоимость производства		Объем производства	
	Август	Сентябрь	Август	Сентябрь
1	3,0	3,6	500	600
2	3,2	2,9	300	500

Произведенный продукт можно хранить в течение месяца, а затем отправлять пользователю. Стоимости хранения единицы продукта на заводах 1 и 2 равны соответственно 0,5 и 0,6 денежной единицы. Найти оптимальный план производства и распределения продукции.

34. Некоторый завод планирует выпуск определенного вида изделий в течение четырех месяцев. Спрос в течение этих месяцев составляет 100, 200, 180, 300 изделий соответственно. Есть три возможности удовлетворить спрос за каждый месяц:

1. Избыток произведенных в прошлом месяце изделий сохранить для реализации в будущем.

2. Спрос за данный месяц удовлетворить за счет производства изделий в этом же месяце.

3. Избыток производства изделий в более поздние месяцы поставить в счет невыполненных заказов.

Затраты на производство одного изделия (независимо от месяца) равны 4 денежным единицам. Дополнительные издержки на хранение единицы изделия равны 0,5 денежной единицы в месяц. Каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом, равным 2 единицам за каждый месяц просрочки.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре

месяца предполагается изготовить 50, 180, 280 и 270 изделий соответственно.

Требуется удовлетворить спрос с минимальными суммарными издержками.

Каждую из транспортных задач 35 – 37 решить в соответствии с тремя разными критериями:

1. Минимизировать суммарные затраты $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

2. Минимизировать суммарное время перевозки товара

$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$, где t_{ij} – время, затрачиваемое на доставку

товара от i -го поставщика j -му потребителю.

3. Минимизировать максимальное из времен перевозок.

35. $a_1 = 70$; $a_2 = 80$; $a_3 = 90$; $b_1 = 20$; $b_2 = 60$; $b_3 = 70$; $b_4 = 50$; $b_5 = 40$;

$$C = \begin{pmatrix} 70 & 100 & 40 & 80 & 50 \\ 90 & 50 & 120 & 60 & 70 \\ 40 & 80 & 30 & 90 & 60 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

36. $a_1 = 60$; $a_2 = 40$; $a_3 = 100$; $a_4 = 50$; $b_1 = 30$; $b_2 = 80$; $b_3 = 65$; $b_4 = 35$; $b_5 = 40$;

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 15 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 70 & 20 & 40 & 90 & 30 \\ 60 & 40 & 120 & 70 & 80 \\ 20 & 50 & 40 & 30 & 70 \\ 90 & 80 & 50 & 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

37. $a_1 = 40$; $a_2 = 25$; $a_3 = 35$; $b_1 = 15$; $b_2 = 40$; $b_3 = 30$; $b_4 = 15$;

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 80 & 50 & 40 & 40 \\ 50 & 40 & 60 & 100 \\ 40 & 140 & 50 & 70 \end{pmatrix}.$$

38. Известен выпуск продукции на трех заводах: $a_1 = 460$; $a_2 = 340$; $a_3 = 300$. Потребности в этой продукции четырех потребителей таковы: $b_1 = 450$; $b_2 = 300$; $b_3 = 550$; $b_4 = 200$. Затраты на производство единицы продукции на каждом заводе равны $d_1 = 9$; $d_2 = 8$; $d_3 = 2$. Матрица C

транспортных расходов на доставку единицы продукции из i -го завода j -му потребителю равна

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Недостающие потребности можно восполнить тремя способами:

- а. Расширение мощности первого завода с дополнительными затратами $\Delta d_1 = 3$ на единицу продукции.
- б. Расширение мощности второго завода с дополнительными затратами $\Delta d_2 = 2$ на единицу продукции.
- с. Строительство нового завода с затратами на производство $d_4 = 5$ и на транспортировку $c_{41} = 7$; $c_{42} = 6$; $c_{43} = 5$; $c_{44} = 9$ единицы изделия соответственно.

Найти оптимальное решение этой ТЗ.

39. Показать, что решение ТЗ не изменится, если ко всем стоимостям некоторой строки или столбца матрицы стоимостей прибавить одно и то же число c . Как при этом изменится значение целевой функции ТЗ?

40. Показать, что решение ТЗ не изменится, если ко всем стоимостям матрицы стоимостей прибавить одно и то же число c . Как при этом изменится значение целевой функции ТЗ?

41. Показать, что система уравнений для неизвестных потенциалов $u_i + v_j = c_{ij}$, если клетка (i, j) – занята, всегда совместна. Показать далее, что, хотя значение одного из потенциалов выбирается произвольно, сумма $u_i + v_j$ не зависит от этого произвольного выбора, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

42. (Анализ на чувствительность). В матрице перевозок задано оптимальное решение ТЗ и двойственной задачи.

$a_i \backslash b_j$	5	15	15	10	u_i
15	10	0	20	11	0
70	12	7	9	20	7
50	0	10	15	18	–5

v_j	5	0	2	11	
-------	---	---	---	----	--

В каждом из указанных случаев найти изменение запасов и потребностей, оставляющее неизменными значения потенциалов. Как при этом изменится оптимальное значение целевой функции ТЗ?

1. Поставщик 1 и потребитель 1.
2. Поставщик 2 и потребитель 2.
3. Поставщик 2 и потребитель 4.
4. Поставщик 3 и потребитель 4.
5. Как изменится целевая функция, если ресурсы поставщика 3 и потребителя 3 возрастут на 2 единицы?

Указание. Пусть запас i -го поставщика и потребность j -го потребителя меняются с a_i до $a_i + \Delta$ и с b_j до $b_j + \Delta$, где Δ – любое число. Если клетка (i, j) – занята, то значение переменной x_{ij} меняется на $x_{ij} + \Delta$. При этом значения потенциалов не изменятся, а в матрице перевозок будет стоять допустимое и, значит, оптимальное решение ТЗ, пока $x_{ij} + \Delta \geq 0$.

Если клетка (i, j) свободна, для нее нужно построить цикл пересчета и скорректировать значения перевозок, стоящих при занятых вершинах цикла. Эти значения не должны быть отрицательными.

43. Ответить, на сколько изменятся минимальные затраты в предлагаемой ТЗ, если в исходные данные внести следующие изменения:

1. Увеличить a_2 и b_2 на 1.
2. Увеличить a_3 на 2, b_1 и b_2 на 1.
3. Уменьшить a_3 и b_3 на 3.
4. Увеличить a_2 на 5, b_3 на 2, b_4 на 3.

$a_i \backslash b_j$	110	50	30	80	100	90
130	2	3	6	8	2	10
90	8	1	2	3	5	6
100	7	4	4	1	4	8
140	2	8	5	1	3	6

44. Для задач 3, 4, 9, 10 ответить на следующие вопросы

1. Как вырастут суммарные затраты, если a_3 и b_3 возрастут на 5 единиц?
2. Как изменятся затраты, если a_1 и b_4 увеличатся на 5 единиц.
3. Запасы какого поставщика выгоднее увеличить, если b_4 увеличить на 20 единиц?
4. Как изменится оптимальное решение, если a_1 увеличить на 1? На сколько при этом изменятся суммарные затраты? У какого поставщика останется избыточная единица ресурсов?

7. ПАРОСОЧЕТАНИЯ

7.1. Определения и примеры

Паросочетанием неориентированного графа $G=(V, E)$ называется такое подмножество M множества E ребер графа G , в котором никакие два ребра из M не являются смежными (т.е. не имеют общей вершины).

Припишем каждому ребру $e_j \in E$ вес c_j . Задача о **максимальном паросочетании** (ЗМП) ставится так: найти паросочетание M^* максимального веса. Вес паросочетания M определяется как сумма весов ребер, составляющих паросочетание: $c_M = \sum_{e_j \in M} c_j$.

Паросочетание M^* называется **максимальным паросочетанием** графа G . Пример паросочетания показан на рис. 7.1, ребра паросочетания выделены жирными линиями.

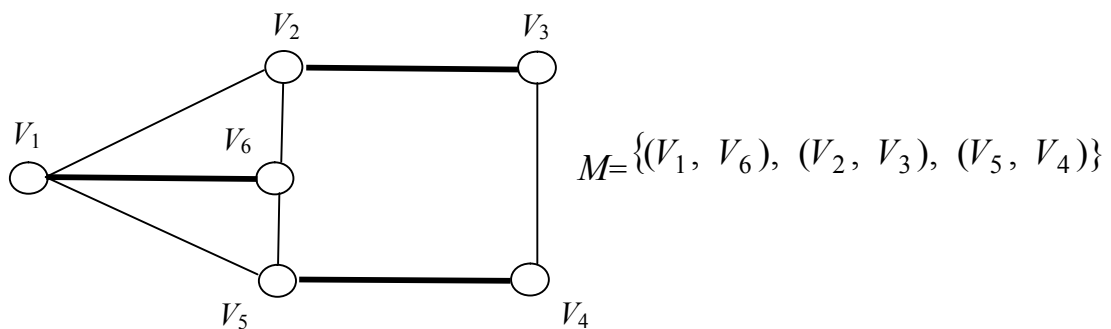


Рис. 7.1.

В частном случае, когда вес всех ребер равен единице, ЗМП сводится к задаче о **наибольшем паросочетании** (ЗНПС). Далее мы рассмотрим частный случай ЗМП – **задачу о назначениях** (ЗН), которая часто встречается в приложениях, а также транспортную задачу (ТЗ), которая является обобщением ЗН.

Если задано паросочетание M в графе G , то **чередующейся цепью** называется простая цепь, ребра которой попеременно лежат или не лежат в паросочетании M . Например, для паросочетания, приведенного на рис. 7.2, цепь $(V_2, V_1), (V_1, V_6), (V_6, V_3), (V_3, V_4), (V_4, V_5)$ – чередующаяся.

Вершина называется **открытой**, если она не инцидентна ни одному ребру из паросочетания M .

Чередующаяся цепь называется **увеличивающей**, если ее первая и последняя вершины открыты. Рассмотренная только что цепь является увеличивающей.

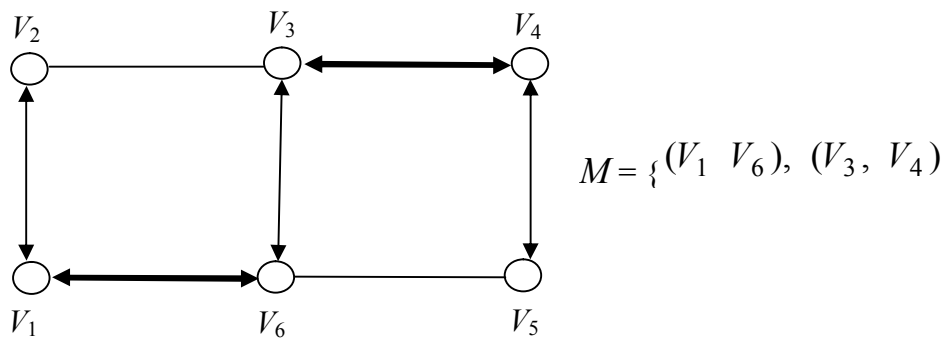


Рис. 7.2.

Если ребра увеличивающей цепи, не принадлежащие паросочетанию M , включить в него, а ребра, принадлежащие M , исключить из него, полученное в результате паросочетание будет содержать на одно ребро больше, чем исходное. Для нашего примера получается паросочетание $M = \{(V_2, V_1), (V_3, V_6), (V_4, V_5)\}$.

Следовательно, если для паросочетания можно найти увеличивающую цепь, оно не может быть наибольшим.

7.2. Основная теорема о наибольших паросочетаниях

Теорема. Паросочетание M будет наибольшим паросочетанием тогда и только тогда, когда в графе G не существует увеличивающей цепи для M .

Необходимость следует из определения увеличивающей цепи.

Докажем достаточность. Пусть M – паросочетание, для которого нет ни одной увеличивающей цепи в графе G , и пусть M^* – наибольшее паросочетание.

Обозначим через G' подграф G – множество ребер, входящих только в одно из двух паросочетаний M и M^* . Никакая вершина из G' не может иметь степень, большую 2, в противном случае два или более ребер из M (или M^*) будут смежными, что противоречит определению паросочетания. Значит, каждая из компонент связности графа G есть либо изолированная вершина, либо простая цепь, либо цикл (рис. 7.3).

Цепь типа б) существовать не может, она является увеличивающей для M , что противоречит исходному предположению.

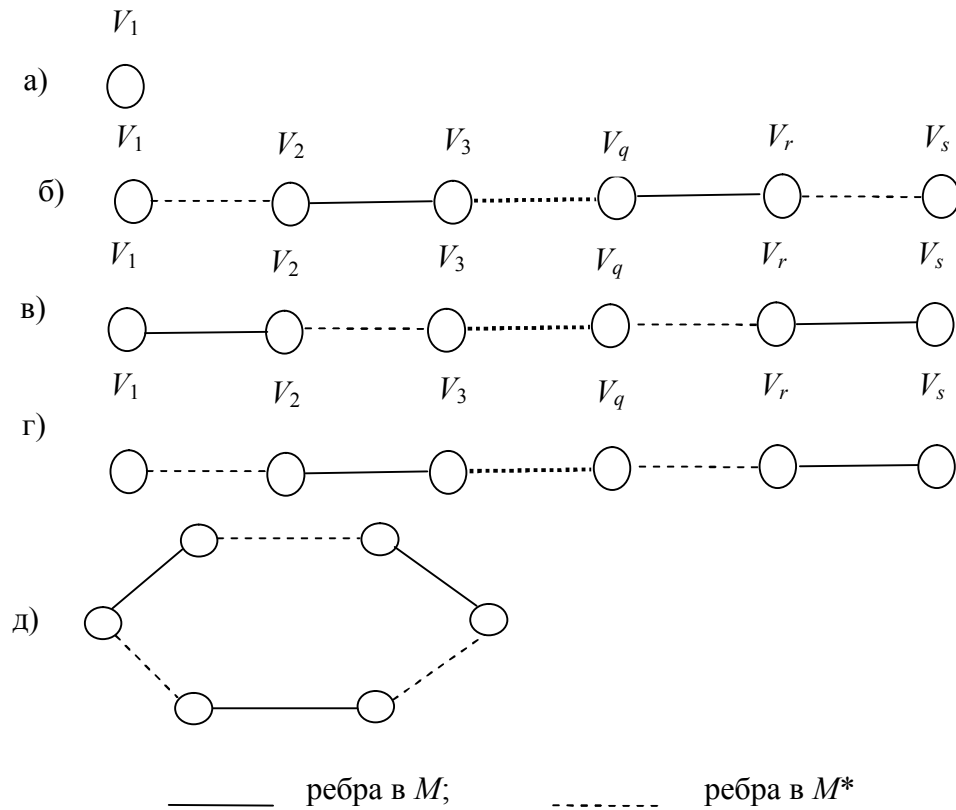


Рис. 7.3.

Цепь типа в) не может быть, она является увеличивающей для M^* , что противоречит предположению о максимальности M^* . Цикл типа д) с нечетным числом ребер не может существовать, в таком цикле либо два ребра из M , либо два ребра из M^* были бы смежными.

Остаются следующие возможности: а), г) и циклы типа д) с четным числом ребер. У каждого из этих графов четное число ребер и ровно половина из них принадлежит M , а другая половина – M^* . Значит, граф G' содержит поровну ребер из M и M^* . Добавляя к ним ребра, принадлежащие одновременно и M , и M^* , получаем, что число ребер в M равно числу ребер в M^* , т.е. M – наибольшее паросочетание.

Рассмотрим в качестве примера граф, изображенный на рис. 7.2. В этом графе выделено паросочетание $M = \{(V_1, V_6), (V_3, V_4)\}$.

Ребра увеличивающей цепи $P = (V_2, V_1), (V_1, V_6), (V_6, V_3), (V_3, V_4), (V_4, V_5)$, не лежащие в M , образуют новое паросочетание $M^* = \{(V_2, V_1), (V_6, V_3), (V_4, V_5)\}$, изображенное на рис. 7.4.

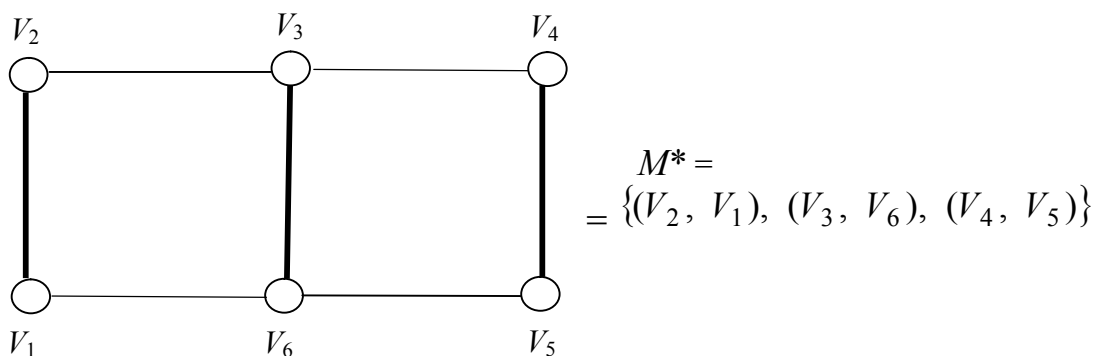


Рис. 7.4.

Открытых вершин больше нет, поэтому не существует никаких увеличивающих относительно M^* цепей, M^* – наибольшее паросочетание.

7.3. Наибольшее паросочетание в двудольном графе

Неориентированный граф $G=(E, V)$ называется **двудольным**, если множество его вершин V может быть разбито на такие два подмножества V_a и V_b , что каждое ребро имеет один конец во множестве V_a , а другой – во множестве V_b . Ориентированный граф G называется **двудольным**, если его основание – двудольный граф.

Если нужно показать, что граф является двудольным, для него принимают обозначение $(V_a \cup V_b, E)$, подразумевая, что $V_a \cup V_b = V$ и $V_a \cap V_b = \emptyset$. Двудольный граф $G=(V_a \cup V_b, E)$ называют **полным**, если для любых двух вершин $V_i \in V_a$ и $V_j \in V_b$ в G существует ребро (V_i, V_j) . Примеры двудольных графов показаны на рис. 7.5.

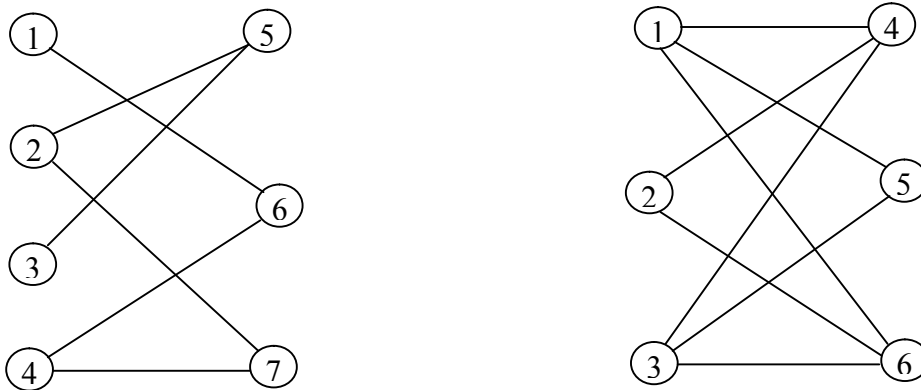


Рис. 7.5.

Запишем задачу отыскания наибольшего паросочетания (т.е. отыскания максимального числа ребер, попарно не имеющих общих вершин) в двудольном графе $G=(V_a \cup V_b, E)$, как задачу целочисленного линейного программирования.

Пусть во множестве V_a содержится m вершин, во множестве V_b – n вершин. Обозначим через x_{ij} величину, равную 1, если в паросочетание включено ребро (V_i, V_j) ($V_i \in V_a, V_j \in V_b, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$), и равную 0 в противном случае. Кроме того, $x_{ij}=0$, если в графе отсутствует ребро (V_i, V_j) . Тогда задача линейного программирования записывается так: максимизировать

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \rightarrow \max \quad (7.1)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1; \quad j=1, \dots, n; \quad (7.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1; \quad i=1, \dots, m; \quad (7.3)$$

$$x_{ij} = 0, \text{ если } (V_i, V_j) \notin E. \quad (7.3')$$

Условия (7.2) и (7.3) означают, что никакие два выбранных ребра не могут иметь общих вершин. Запишем задачу, двойственную задаче (7.1)-(7.3). Обозначим через v_j ($j=1, \dots, n$) двойственные переменные, соответствующие условиям (1.2), через u_i ($i=1, \dots, m$) – двойственные переменные, соответствующие условиям (7.3), через w_k – двойственные переменные, соответствующие условиям (7.3') ($k=m \times n - |E|$). Тогда двойственная задача есть задача минимизации суммы:

$$\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{j=1}^n v_j \rightarrow \min \quad (7.4)$$

при условиях:

$$u_i + v_j \geq 1; \quad (V_i, V_j) \in E; \quad (7.5)$$

$$u_i + v_j + w_k \geq 1; \quad (V_i, V_j) \notin E; \quad (7.5')$$

$$u_i \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n. \quad (7.6)$$

Эту двойственную задачу можно интерпретировать на графе следующим образом. Назовем подмножество множества $V_a \cup V_b$ вершин графа G **A,B-разделяющим**, если удаление всех вершин этого

подмножества вместе с инцидентными им ребрами приводит к исчезновению всех ребер в графе. Иначе говоря, каждое ребро графа инцидентно, по крайней мере, одной вершине A, B -разделяющего множества. Тривиальными примерами A, B -разделяющих множеств являются множества $V = V_a \cup V_b$, V_a , V_b . Требуется найти A, B -разделяющее множество вершин графа $G = (V_a \cup V_b, E)$, состоящее из минимального возможного числа вершин (минимальное A, B -разделяющее множество). На рис. 7.6 показан пример такого множества, $A, B = \{3, 6, 7\}$

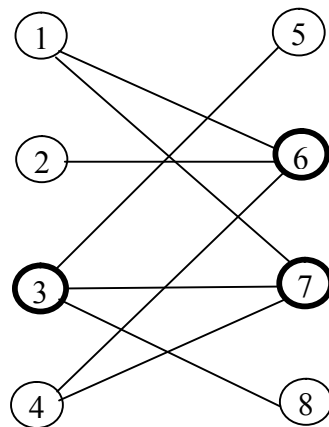


Рис. 7.6.

Обозначим через u_i переменную, равную нулю, если вершина $i \in V_a$ не вошла в A, B -разделяющее множество, и равную единице в противном случае, $i = 1, \dots, m$. Для вершин множества V_b введем обозначение v_j , $j = 1, \dots, n$. Тогда задача (7.4) – (7.6) и будет математической моделью задачи отыскания в двудольном графе минимального A, B -разделяющего множества вершин.

Среди оптимальных решений задач (7.1) – (7.3) и (7.4) – (7.6) всегда есть целочисленные, ведь в любом графе, безусловно, существуют и минимальное A, B – разделяющее множество вершин, и наибольшее паросочетание, поэтому можно воспользоваться первой теоремой двойственности, не обращая внимания на условия целочисленности переменных x_{ij} , u_i , v_j .

Согласно первой теореме двойственности, оптимальные значения целевых функций совпадают. Применительно к нашей интерпретации получается следующая **теорема**.

Число ребер в наибольшем паросочетании двудольного графа равно числу вершин в минимальном A, B -разделяющем множестве вершин. Эта теорема называется **теоремой Кенига – Эгервари**, по имени венгерских

математиков, которые впервые ее доказали. Первоначально эта теорема формулировалась не для двудольных графов, а для так называемых $(0, 1)$ -матриц. К такой постановке мы обратимся в следующем параграфе.

7.4. Алгоритм отыскания увеличивающей цепи для паросочетания в двудольном графе

В дальнейшем будет удобно задавать двудольный граф с помощью матрицы из m строк и n столбцов. Чтобы упростить обозначения, перенумеруем вершины в каждом из множеств V_a , V_b и будем обозначать ребро парой номеров его вершин: (i, j) . На пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы стоит 1, если в графе есть ребро (i, j) , ($i \in V_a$, $j \in V_b$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$), и стоит 0, если такого ребра нет. Подобные матрицы называются $(0, 1)$ -матрицами. Строки и столбцы матрицы назовем общим термином «ряд». Клетки с единицами назовем **допустимыми**, с нулями – **недопустимыми**. Множество рядов **покрывает** допустимые клетки данной таблицы, если каждая допустимая клетка содержится хотя бы в одном ряду из этого множества. Совокупность допустимых клеток назовем **независимой**, если никакие две клетки не лежат в одном ряду.

Понятие независимого множества допустимых клеток в точности соответствует понятию ребер, попарно не имеющих общих вершин, а понятие покрывающего множества рядов – понятию A, B -разделяющего множества вершин.

В этих определениях теорема Кенига – Эгервари принимает вид: максимальное число независимых допустимых клеток равно минимальному числу рядов, покрывающих все допустимые клетки.

Если в двудольном графе задано некоторое паросочетание M , обведем в матрице кружками соответствующие единицы. Приведем алгоритм, осуществляющий систематический поиск увеличивающих цепей для заданного паросочетания. Он основан на том очевидном факте, что если в двудольном графе выделена увеличивающая цепь, то одна открытая вершина этой цепи лежит во множестве V_a , а другая – во множестве V_b .

Шаг 1. Пометить все строки i , не содержащие кружков (эти строки соответствуют открытым вершинам множества V_a), меткой $P_i = 0$. Если таких строк нет, то данное паросочетание – наибольшее.

Шаг 2. Пометить каждый непомеченный столбец j , содержащий допустимую клетку в помеченной строке i , меткой $P_j = i$ (выделяются возможные ребра увеличивающей цепи, не принадлежащие данному паросочетанию). Если таких возможностей несколько, выбрать любую.

Шаг 3. Пометить каждую непомеченную строку i , содержащую в помеченном столбце j обведенную кружком единицу, меткой $P_i = j$ (выделяются возможные ребра увеличивающей цепи, принадлежащие данному паросочетанию).

Шаг 4. Повторять шаги 2, 3 до тех пор, пока:

- а) либо будет помечен столбец, не содержащий кружка;
- б) либо никаких пометок приписать больше нельзя, а все помеченные столбцы содержат кружки.

В случае б) ни одной увеличивающей цепи для паросочетания построить нельзя, оно – наибольшее. В случае а) перейти к шагу 5.

Шаг 5. Помеченный столбец, не содержащий кружка, соответствует второй открытой вершине увеличивающей цепи. Выделить саму увеличивающую цепь, начиная с этой вершины, ориентируясь по значениям расставленных пометок. Включить в паросочетание все не принадлежащие ему ребра этой цепи (обвести единицы кружком), исключить из паросочетания ребра этой цепи, ранее входящие в него (стереть кружки). Общее число ребер в новом паросочетании (единиц в кружках) увеличивается на единицу. Перейти к шагу 1.

Пример. Построить увеличивающую цепь для паросочетания, приведенного в табл. 7.1. Расстановка меток приведена в табл. 7.2. Метки строк и столбцов показаны курсивом с подчеркиванием.

Шаг 1. Метим строки 8 и 9 меткой 0.

Шаг 2. Метим столбцы с номерами 2, 4, 6 меткой 8, а столбцы с номерами 1 и 8 – меткой 9.

Шаг 3. Строки 1, 2, 3, 5, 6 получают метки 2, 1, 4, 8 соответственно.

Шаг 2. Столбец 3 получает метку 2.

Шаг 3. Строка 4 получает метку 3.

Шаг 2. Столбцы 5 и 9, помеченные от четвертой строки, не содержат кружков (см. табл. 7.2).

Шаг 5. Возьмем в качестве одной из открытых вершин увеличивающей цепи или вершину 5, или вершину 9 (из множества V_b), например, вершину 5. Выделим увеличивающую цепь. Столбец 5 помечен от строки 4, строка 4 – от столбца 3, столбец 3 – от строки 2, строка 2 – от столбца 1, столбец 1 помечен от строки 9. Эта строка помечена нулем. Определена вторая

открытая вершина увеличивающей цепи (из множества V_a). Сама цепь такова (жирным шрифтом выделены ребра из паросочетания): (9, 1), (**2, 1**), (2, 3), (**4, 3**), (4, 5).

Исключим ребра (2, 1) и (4, 3) из паросочетания, включим в паросочетание ребра (9, 1), (2, 3), (4, 3); общее число ребер в нем увеличилось на единицу (табл. 7.3).

Таблица 7.1

$\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1				1		1	
2	1		1	1					
3		1		1				1	
4		1	1	1	1	1		1	1
5				1		1		1	
6		1				1		1	
7	1		1	1		1	1		1
8		1		1		1			
9	1			1				1	

Таблица 7.2

		<u>2</u>	<u>8</u>	<u>2</u>	<u>8</u>	<u>4</u>	<u>8</u>		<u>2</u>	<u>4</u>
	$\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<u>2</u>	1		1				1		1	
<u>1</u>	2	1		1	1					
<u>4</u>	3		1		1				1	
<u>3</u>	4		1	1	1	1	1		1	1
<u>6</u>	5				1		1			
<u>8</u>	6		1				1		1	
	7	1		1			1	1		1
<u>0</u>	8		1		1		1			
<u>0</u>	9	1			1				1	

Можно ли добавить к найденному паросочетанию еще одно ребро? Выполним снова шаги 1 – 4 (см.табл. 7.3). Ни одной новой метки

приписать нельзя, а все помеченные столбцы содержат кружки. Следовательно, *паросочетание в табл. 7.3 – наибольшее.*

То, что данный алгоритм действительно находит увеличивающую цепь, если она существует, вытекает из его описания. Докажем, что в случае б) шага 4 непомеченные строки и помеченные столбцы образуют минимальное покрывающее множество рядов. Имеем:

Таблица 7.3

			<u>8</u>		<u>8</u>		<u>8</u>		<u>1</u>	
	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<u>2</u>	i	1	(1)				1		1	
	2	1		(1)	1					
<u>4</u>	3		1		(1)				1	
	4		1	1	1	(1)	1		1	1
<u>6</u>	5				1		(1)		1	
<u>8</u>	6		1				1		(1)	
	7	1		1	1		1	(1)		1
<u>0</u>	8		1		1		1			
	9	(1)			1			1		

1) ни одна единица не может стоять в помеченной строке и непомеченном столбце (см. шаги 1, 2, 3);

2) общее число кружков равно сумме помеченных столбцов и непомеченных строк. Действительно, все помеченные столбцы содержат кружки, а все кружки, стоящие в непомеченных строках, стоят одновременно в непомеченных столбцах (шаг 3).

В табл. 7.3 непомеченные строки 2, 4, 7, 9 и помеченные столбцы 2, 4, 6, 8 образуют минимальное покрывающее множество рядов. Всего имеем 8 ребер в наибольшем паросочетании и 8 строк и столбцов в этом покрывающем множестве.

7.5. Задача об оптимальных назначениях (ЗН)

Задача об оптимальных назначениях – это ЗМП для полного двудольного графа. Часто ей придается следующая формулировка. Имеется n работ и n исполнителей. Пусть c_{ij} – доход от выполнения i -м

исполнителем j -й работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну и только одну работу так, чтобы суммарный доход был наибольшим.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} переменную, равную единице, если i -й исполнитель назначен на j -ю работу, и нулю – в противном случае. Тогда ЗН сводится к такой задаче линейного программирования: максимизировать

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (7.7)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n; \quad (7.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n; \quad (7.9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.9')$$

Первое условие означает, что каждая работа дается только одному исполнителю, второе – каждому исполнителю представлена только одна работа. На требование целочисленности x_{ij} можно не обращать внимания, если предположить, что числа c_{ij} – целые. Мы увидим, что в этом случае существует целочисленное оптимальное решение ЗН.

Часто ЗН формулируется как задача минимизации, если c_{ij} – не доход, а затраты на выполнение i -м исполнителем j -й работы. Так как целевая функция транспортной задачи, обобщающей ЗН, минимизируется, в дальнейшем и для целевой функции ЗН будем искать минимум. А переход от задачи минимизации к задаче отыскания максимума целевой функции осуществляется просто. Пусть $d = \max c_{ij}$. Положим, $c'_{ij} = d - c_{ij}$.

Тогда задача минимизации выражения

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d - c_{ij}) x_{ij} = dn - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

и задача максимизации функции $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ эквивалентны.

Если в ЗН число работ не равно числу исполнителей, достаточно ввести соответствующее дополнительное число работ (исполнителей) с одинаковыми затратами, равными нулю.

Далее будем считать, что матрица затрат квадратная.

Запишем задачу, двойственную к ЗН. Обозначим через u_i двойственные переменные, соответствующие ограничениям (7.8) ($i = 1, \dots, n$); через v_j – двойственные переменные, соответствующие ограничениям (7.9) ($j = 1, \dots, n$).

Двойственная задача такова: максимизировать

$$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \rightarrow \max \quad (7.10)$$

при условиях:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.11)$$

По второй теореме двойственности допустимые решения $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{nn})$ и $\bar{y} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ задач (7.7) – (7.9') и (7.10) – (7.11) оптимальны тогда и только тогда, когда

$$(u_i + v_j - c_{ij})x_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.12)$$

(Условия дополняющей нежесткости).

Предположим, что найдено некоторое допустимое решение $\bar{y} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ задачи (7.10) – (7.11).

Найдем в матрице затрат те клетки (i, j) , для которых $c_{ij} = u_i + v_j$. Будем считать эти клетки допустимыми и решим задачу о наибольшем паросочетании для соответствующего двудольного графа. Возможны два случая:

- а) в паросочетание вошли n ребер;
- б) число m ребер паросочетания меньше n .

В случае а) положим $x_{ij} = 1$, если ребро (i, j) принадлежит паросочетанию, $x_{ij} = 0$ в противном случае. Мы получим оптимальное решение ЗН, так как выполнены условия дополняющей нежесткости.

В случае б) вектор $\bar{y}$ – не оптимальное решение задачи (7.10 – 7.11), его можно улучшить. Прочеркнем в матрице затрат непомеченные строки и помеченные столбцы. Все допустимые клетки вычеркнутся, в матрице останутся только такие стоимости c_{ij} , для которых $c_{ij} > u_i + v_j$. Положим $h = \min(c_{ij} - u_i - v_j)$, если строка i помечена, а столбец j не помечен. Тогда $h > 0$.

Изменим значения двойственных переменных по правилу

$$u'_i = \begin{cases} u_i + h, & \text{если строка } i \text{ помечена;} \\ u_i, & \text{если строка } i \text{ не помечена, } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (7.13')$$

$$v'_j = \begin{cases} v_i - h, & \text{если столбец } j \text{ помечен;} \\ v_i, & \text{если столбец } j \text{ не помечен, } j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (7.13'')$$

Чтобы доказать допустимость нового решения, достаточно показать, что $u'_i + v'_j = u_i + v_j + h \leq c_{ij}$, если строка i помечена, а столбец j не помечен. Но это следует из способа выбора h . При этом на новом решении целевая функция двойственной задачи увеличилась. Действительно, пусть число ребер в наибольшем паросочетании равно $m < n$; число непомеченных строк равно k , число помеченных столбцов равно l . Тогда $k + l = m < n$. Целевая функция двойственной задачи на новом решении равна:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u'_i + \sum_{j=1}^n v'_j &= \sum_{i=1}^n u_i + h(n - k) + \sum_{j=1}^n v_j - hl = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j + \\ &+ h(n - k - l) > \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j. \end{aligned}$$

Теперь можно снова найти в матрице затрат те клетки, для которых $c_{ij} = u'_i + v'_j$, снова решить задачу о наибольшем паросочетании и т.д. Если c_{ij} — целые числа, каждый раз целевая функция двойственной задачи увеличивается на целое число. Поэтому за конечное число шагов она достигнет своего максимума. Тогда автоматически получится и оптимальное решение ЗН.

Формальное описание алгоритма.

Шаг 1. Найти допустимое решение двойственной задачи, положив

$$u_i = \min_j c_{ij}, \quad i = 1, \dots, n; \quad v_j = \min_i (c_{ij} - u_i), \quad j = 1, \dots, n.$$

Ясно, что получается допустимое решение и что в каждой строке и каждом столбце матрицы затрат будет по крайней мере одна допустимая клетка.

Шаг 2. Положить $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

Шаг 3. Решить задачу о наибольшем паросочетании, считая допустимыми клетки с нулями в матрице C' . Возможны два случая:

- а) в паросочетание вошли n ребер;
- б) в паросочетание вошли $m < n$ ребер.

В случае а) перейти к шагу 6, в случае б) — к шагу 4.

Шаг 4. Прочеркнуть непомеченные строки и помеченные столбцы (минимальное покрывающее множество рядов) в матрице C' и найти минимальный элемент h в оставшейся части матрицы ($h > 0$).

Шаг 5. Пересчитать значения двойственных переменных по правилу:

$$u'_i = \begin{cases} u_i + h, & \text{если строка } i \text{ помечена;} \\ u_i, & \text{если строка } i \text{ не помечена, } i=1, \dots, n. \end{cases}$$

$$v'_j = \begin{cases} v_j - h, & \text{если столбец } j \text{ помечен;} \\ v_j, & \text{если столбец } j \text{ не помечен, } j=1, \dots, n. \end{cases}$$

Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Положить $x_{ij} = 1$, если ребро (i, j) входит в наибольшее паросочетание, $x_{ij} = 0$ – в противном случае, ЗН решена.

Для удобства вычислений шаг 5 можно записать несколько иначе.

Шаг 5. Вычесть h из всех непрочеркнутых элементов матрицы затрат C' и прибавить h к дважды прочеркнутым элементам. Перейти к шагу 3.

Пример. Решим ЗН с матрицей затрат, заданной в табл. 7.4.

Таблица 7.4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	
1	8	6	6	4	7	5	$(u_1 = 4)$
2	5	6	9	6	7	8	$(u_2 = 5)$
3	7	4	7	5	5	9	$(u_3 = 4)$
4	5	4	7	4	6	8	$(u_4 = 4)$
5	8	7	7	8	5	7	$(u_5 = 5)$
6	7	3	6	5	5	6	$(u_6 = 3)$

Значения v_j : 0 0 2 0 0 1

Шаг 1. Определяем допустимое решение двойственной задачи.

$$u_1 = \min_j c_{1j} = \min(8, 6, 6, 4, 7, 5) = 4;$$

$$u_2 = \min_j c_{2j} = 5; \quad u_3 = \min_j c_{3j} = 4; \quad u_4 = \min_j c_{4j} = 4; \quad u_5 = \min_j c_{5j} = 5;$$

$$u_6 = \min_j c_{6j} = 3;$$

$$v_1 = \min_i (c_{i1} - u_i) = \min(8 - 4, 5 - 5, 7 - 4, 5 - 4, 8 - 5, 7 - 3) = 0;$$

$$v_2 = \min_i (c_{i2} - u_i) = \min(6 - 4, 6 - 5, 4 - 4, 4 - 4, 7 - 5, 3 - 3) = 0;$$

$$v_3 = \min_i (c_{i3} - u_i) = 2; \quad v_4 = \min_i (c_{i4} - u_i) = 0;$$

$$v_5 = \min_i (c_{i5} - u_i) = 0; \quad v_6 = \min_i (c_{i6} - u_i) = 1.$$

Шаг 2. Вычисляем $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $i=1, \dots, 6$, $j=1, \dots, 6$.

Результаты расчетов приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5

$u_i \backslash v_j$	0	0	2	0	0	1
4	-4	2	0	0	3	0
5	0	1	2	1	2	2
4	3	0	1	1	1	4
4	-1	0	1	0	2	3
5	-3	2	0	3	0	1
3	4	0	1	2	2	2

Шаг 3. Решим задачу о наибольшем паросочетании, считая допустимыми клетки с нулями. Ход решения задачи отражен в табл. 7.6.

Таблица 7.6

		<u>6</u>					
		1	2	3	4	5	6
<u>2</u>	1			①	1		1
	2	①					
	3		①				
	4		1		①		
	5			1		①	
	6		1				

Число дуг в наибольшем паросочетании равно 5. Непомеченные строки 1, 2, 4, 5 и помеченный столбец 2 образуют максимальное покрывающее множество рядов.

Шаг 4. Прочеркнем в матрице затрат непомеченные строки и помеченный столбец (см. табл. 7.5). Минимальный элемент h в оставшейся части матрицы равен 1 (все такие минимальные элементы в табл. 7.5 показаны жирным курсивом).

Шаг 5. Пересчитаем значения двойственных переменных.

$$u_3 = 4 + 1 = 5, \quad u_6 = 3 + 1 = 4, \quad v_2 = 0 - 1 = -1.$$

Остальные двойственные переменные остаются без изменения.

Вычтем 1 из всех непрочеркнутых элементов табл. 7.5 и прибавим к дважды прочеркнутым элементам (табл. 7.7).

Таблица 7.7

$u_i \backslash v_j$	0	-1	2	0	0	1
4	4	3	0	0	3	0
5	0	2	2	1	2	2
5	2	0	0	0	0	3
4	1	1	1	0	2	3
5	3	3	0	3	0	1
4	3	0	0	1	1	1

Шаг 3. Решим задачу о наибольшем паросочетании, считая допустимыми клетки с нулями (табл. 7.8).

Таблица 7.8

		<u>6</u> <u>6</u> <u>1</u> <u>3</u> <u>1</u>					
		j					
<u>3</u>	$i \backslash$	1	2	3	4	5	6
	1			(1)	1		(1)
	2	(1)					
	3		(1)	1	1	1	
	4				(1)		
	5			1		(1)	
<u>0</u>	6		1	(1)			

Увеличивающая цепь: (6, 3), **(1, 3)**, (1, 6). Жирным шрифтом выделено ребро (1, 3), принадлежащее паросочетанию. Включаем в паросочетание ребра (6, 3) и (1, 6), исключаем из паросочетания ребро (1, 3) (см. табл. 7.8). Теперь в паросочетание входят шесть ребер, оно – наибольшее. Полагаем $x_{16} = x_{21} = x_{32} = x_{44} = x_{55} = x_{63} = 1$.

Первый рабочий получает шестую работу, второй – первую, третий – вторую, четвертый – четвертую, пятый – пятую, шестой – третью. Минимальные затраты равны:

$$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 6 = 29.$$

Для контроля вычислим значение целевой функции двойственной задачи. На оптимальных решениях значения целевых функций должны совпасть (первая теорема двойственности).

$$\sum u_i + \sum v_j = 4 + 5 + 5 + 4 + 5 + 4 - 1 + 2 + 1 = 29.$$

Описываемый алгоритм решения ЗН был предложен американским математиком Куном (1955 г.), который назвал его венгерским, в честь венгерских математиков, на работах которых он основывался.

8. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ВЕНГЕРСКИЙ АЛГОРИТМ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Далее мы рассмотрим венгерский алгоритм решения ТЗ, предложенный создателями теории потоков в транспортных сетях Фордом и Фалкерсоном, которые обобщили алгоритм Куна решения ЗН. Рассмотрим коротко теорию Форда и Фалкерсона, в частности, теорему Форда – Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе и основанный на ней алгоритм отыскания максимального потока в транспортной сети. Венгерский алгоритм двойственен по отношению к методу потенциалов, описанному ранее. В этом алгоритме происходит последовательное улучшение решения задачи, двойственной транспортной. Одновременно с оптимальным решением двойственной задачи получается и оптимальное решение ТЗ. Венгерский алгоритм свободен от эффекта вырожденности; на каждой итерации целевая функция двойственной задачи увеличивается на некоторое целое положительное число.

8.1. Потоки в сетях

Рассмотрим ориентированный граф $G=(V, E)$ с одним источником s (вершиной, из которой дуги только выходят) и одним стоком t (вершиной, в которую дуги только входят). Каждой дуге (V_i, V_j) графа G поставим в соответствие положительное целое число $r(V_i, V_j)$, называемое пропускной способностью дуги. В этом случае говорят, что задана транспортная сеть. Неотрицательные числа $x(V_i, V_j)$, определенные на дугах (V_i, V_j) , называются потоками на дугах, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum x(V_i, V_j) - \sum x(V_k, V_i) &= 0, \quad V_i \neq s, t; \\ (V_i, V_j) &\in E_{V_i \rightarrow}; \quad (V_k, V_i) \in E_{V_i \leftarrow}; \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$0 \leq x(V_i, V_j) \leq r(V_i, V_j) \quad \text{для всякой дуги } (V_i, V_j) \text{ данного графа} \quad (8.2)$$

Через $E_{V_i \rightarrow}$ обозначено множество дуг графа G , выходящих из вершины V_i , через $E_{V_i \leftarrow}$ обозначено множество дуг графа G , входящих в вершину V_i .

Условие 8.1 называют уравнением сохранения потока. Оно означает, что суммарный поток, втекающий во всякую вершину, отличную от источника и стока, равен суммарному потоку, вытекающему из этой вершины.

Условие (8.2) означает, что поток на каждой дуге ограничен ее пропускной способностью.

Пример транспортной сети с заданными потоками на дугах показан на рис. 8.1. Числа над дугами означают пропускные способности, числа в скобках – потоки.

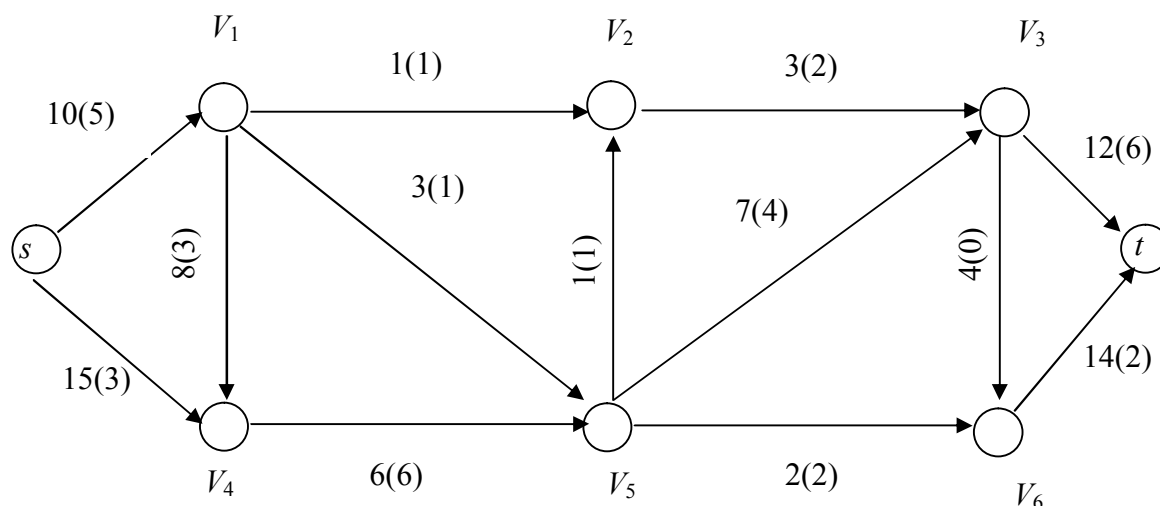


Рис. 8.1. Пример транспортной сети

Дуга (V_i, V_j) называется **насыщенной**, если $x(V_i, V_j) = r(V_i, V_j)$, и **ненасыщенной** – в противном случае. На рис. 8.1 насыщенными являются дуги (V_4, V_5) , (V_1, V_2) , (V_5, V_2) , (V_5, V_6) . Остальные дуги – ненасыщенные.

Из условия сохранения потока (8.1) следует, что суммарный поток, вытекающий из источника, равен суммарному потоку, втекающему в сток.

$$\sum_{V_j \in E_S \rightarrow} x(s, V_j) = \sum_{V_i \in E_t \leftarrow} x(V_i, t) = v. \quad (8.3)$$

Для доказательства формулы (8.3) достаточно просуммировать потоки на дугах транспортной сети двумя способами. Первый раз надо суммировать потоки на дугах, считая, что каждая дуга выходит из некоторой вершины. Второй раз нужно вычислить ту же сумму, полагая, что каждая дуга входит в некоторую вершину. Затем применить (8.1).

Число v называется **величиной потока** или просто **потоком** в транспортной сети. На рис. 8.1 показана транспортная сеть с потоком величины $v = 5 + 3 = 6 + 2 = 8$.

Основная **задача о максимальном потоке из s в t** состоит в нахождении такого множества потоков по дугам, чтобы величина v была

максимальной. Эта задача и её варианты возникают во многих приложениях.

Задача максимизации выражения (8.3) при условиях (8.1) – (8.2) – это задача линейного программирования. Дадим сначала содержательное описание двойственной задачи. Затем опишем алгоритм построения максимального потока. Далее построим модель двойственной задачи и применим условия дополняющей нежесткости, чтобы доказать, что поток действительно максимален. Одновременно доказываем оптимальность найденного решения двойственной задачи.

8.2. Разрезы

Разобьем множество V вершин транспортной сети на два непересекающихся подмножества R и $\bar{R}$: $R \cup \bar{R} = V$, $R \cap \bar{R} = \emptyset$ так, чтобы $s \in R$, а $t \in \bar{R}$. Тогда **разрезом, отделяющим s от t** , называется совокупность всех дуг транспортной сети вида (V_i, V_j) , где $V_i \in R$, $V_j \in \bar{R}$. Будем обозначать разрез символом $(R, \bar{R})$.

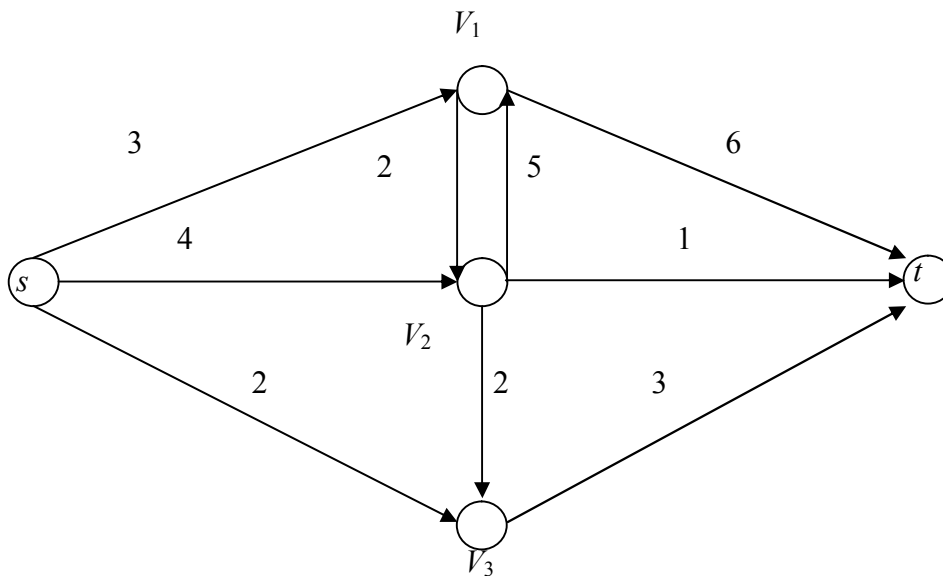


Рис. 8.2. Пример транспортной сети

Какой бы путь из s в t мы не рассматривали, хотя бы одна его дуга входит в данный разрез $(R, \bar{R})$. Это следует из того, что s и t принадлежат разным множествам. Следовательно, если удалить все дуги разреза $(R, \bar{R})$, то в сети не останется ни одного пути из s в t . Поэтому и говорят, что разрез отделяет источник от стока.

Пропускной способностью разреза называется сумма пропускных способностей дуг, составляющих разрез:

$$r(R, \bar{R}) = \sum_{(V_i, V_j) \in (R, \bar{R})} r(V_i, V_j), \quad (8.4)$$

Разрез сети, имеющий наименьшую пропускную способность, называется **минимальным**.

Для примера рассмотрим транспортную сеть, показанную на рис. 8.2. Числа над дугами означают их пропускные способности.

Для данной сети можно построить 8 разрезов. Назовем некоторые из них. Пусть $R_1 = \{s, V_1\}$, тогда $\bar{R}_1 = \{V_2, V_3, t\}$,

$$(R_1, \bar{R}_1) = \{(s, V_2), (s, V_3), (V_1, V_2), (V_1, t)\},$$

$$r(R_1, \bar{R}_1) = 4 + 2 + 2 + 6 = 14.$$

$$\text{Пусть } R_2 = \{s, V_2, V_3\}, \text{ тогда } \bar{R}_2 = \{V_1, t\},$$

$$(R_2, \bar{R}_2) = \{(s, V_1), (V_2, V_1), (V_3, t)\},$$

$$r(R_2, \bar{R}_2) = 3 + 5 + 3 = 11.$$

$$\text{Пусть } R_3 = \{s\}, \text{ тогда } \bar{R}_3 = \{V_1, V_2, V_3, t\},$$

$$r(R_3, \bar{R}_3) = 9, (R_3, \bar{R}_3) = \{(s, V_1), (s, V_2), (s, V_3)\}.$$

Легко убедиться, что минимальным для этой сети является разрез $(R_3, \bar{R}_3)$ с пропускной способностью равной 9.

Задача отыскания минимального разреза для данной транспортной сети и есть задача, двойственная задаче о максимальном потоке. Из основного неравенства теории двойственности следует, что величина произвольного потока v и величина пропускной способности произвольного разреза $(R, \bar{R})$ в той же транспортной сети связаны соотношением

$$v \leq r(R, \bar{R}). \quad (8.5)$$

Это неравенство также непосредственно следует из того факта, что в любой путь из источника в сток входит, по крайней мере, одна дуга разреза.

Из неравенства (8.5) следует, что если мы построим поток такой величины v^* и разрез такой пропускной способности $r(R, \bar{R})^*$, что $v^* = r(R, \bar{R})^*$, этот поток будет максимальным, а разрез $r(R, \bar{R})^*$ – минимальным.

Если пропускные способности дуг – целые числа, то задача о максимальном потоке, очевидно, имеет решение. Величина максимального потока не превышает

$$\min \left(\sum_{V_i \in E_s \rightarrow} r(s, V_i), \sum_{V_j \in E_t \leftarrow} r(V_j, t) \right).$$

Но тогда и задача отыскания минимального разреза имеет решение, а по первой теореме двойственности оптимальные значения целых функций совпадают. Конструктивное доказательство этой теоремы дается так называемой теоремой Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе.

8.3. Теорема Форда– Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе

Теорема. Для любой сети величина v^* максимального потока из s в t равна пропускной способности $r(R, \bar{R})^*$ минимального разреза $(R, \bar{R})^*$, отделяющего s от t .

Для доказательства теоремы нам потребуется понятие увеличивающей цепи, по которой можно увеличить поток из источника в сток.

Пусть удалось найти цепь, соединяющую вершины s и t , дуги которой удовлетворяют следующим условиям:

1) все дуги цепи, которые проходятся в направлении их ориентации (прямые дуги), не насыщены;

2) на всех дугах цепи, которые проходятся в направлении, обратном их ориентации (обратных дугах), поток больше нуля. На рис. 8.4 приведен пример такой цепи.

В рассматриваемой цепи можно переслать дополнительный поток из источника в сток. Действительно, положим

$$E_1 = \min(r(V_i, V_j) - x(V_i, V_j)), \quad (8.6)$$

где минимум берется по всем прямым дугам цепи;

$$E_2 = \min(x(V_i, V_j)), \quad (8.7)$$

где минимум берется по всем обратным дугам цепи;

$$E = \min(E_1, E_2). \quad (8.8)$$

Ясно, что $E > 0$. Для нашего примера $E_1 = \min(4 - 2; 3 - 2; 5 - 1) = 1$;

$E_2 = \min(3, 2) = 2$; $E = \min(1, 2) = 1$.

Увеличим поток на всех прямых дугах на число E и уменьшим поток на всех обратных дугах на E (рис. 8.3). Из определения числа E следует,

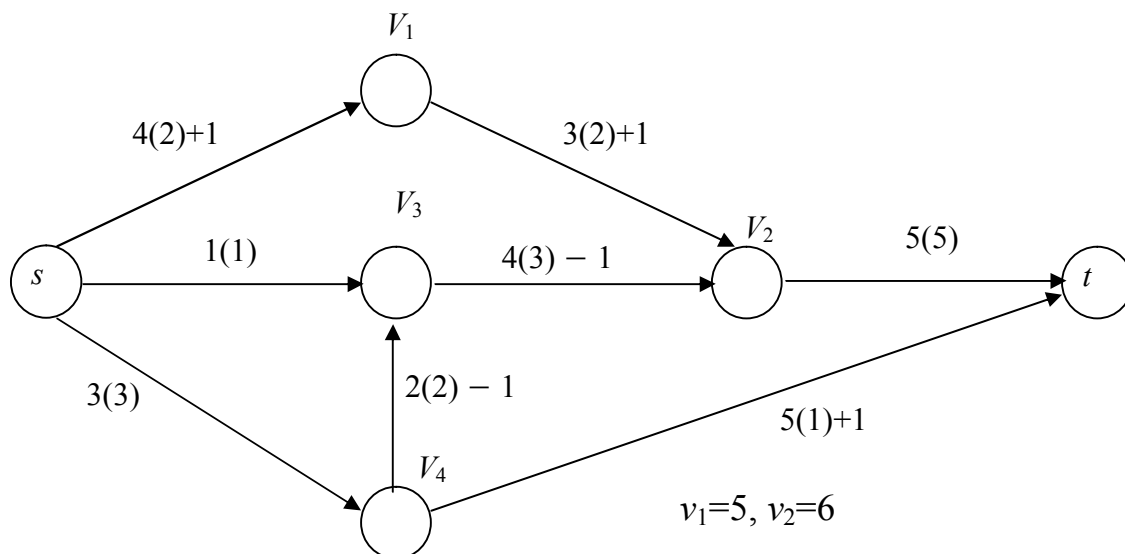


Рис. 8.3. Пример потока, который можно увеличить

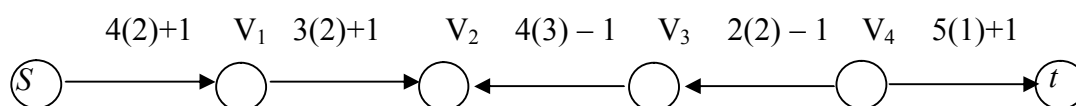


Рис. 8.4. Пример увеличивающей цепи

что такая операция не нарушит условий (8.4), (8.5), а величина потока увеличится при этом на E . Каждая цепь s в t , по которой могут быть посланы дополнительные единицы потока, называется **увеличивающей цепью**. Если в транспортной сети можно найти увеличивающую цепь, поток в сети не является максимальным.

Докажем теорему Форда-Фалкерсона.

Пусть в сети задан максимальный поток, величина которого равна v^* .

Определим разрез $(R, \bar{R})^*$, указав вершины множества R .

Положим $s \in R$.

Если $V_i \in R$ и $x(V_i, V_j) < r(V_i, V_j)$, то $V_j \in R$,

Если $V_i \in R$ и $x(V_j, V_i) > 0$, то $V_j \in R$. (8.9)

Вершины множества R определяются одна за другой, начиная с источника s . Некоторая вершина V_j включается во множество R , если существует увеличивающая цепь от s к V_j . Так как поток v^* — максимальный, не существует увеличивающей цепи из s к t , поэтому вершина t окажется во множестве $\bar{R}$, мы действительно определили

разрез. Из правила (8.9) построения множества R следует, что если $V_i \in R$, $V_j \in \bar{R}$, то $x(V_i, V_j) = r(V_i, V_j)$, $x(V_j, V_i) = 0$. Чтобы доказать равенство $r(R, \bar{R})^* = v^*$, нам потребуется математическая модель двойственной задачи.

Перепишем математическую модель задачи о максимальном потоке по-другому, упростив обозначения. Пусть всего в транспортной сети n вершин, включая источник и сток. Припишем источнику номер 1, стоку – номер n , остальные вершины в произвольном порядке получают номера от 2 до $n-1$. Дуги будем обозначать номерами вершин, которые они соединяют. Поток на дуге (i, j) обозначим x_{ij} , $i=1, \dots, n-1; j=2, \dots, n; i \neq j$. Пропускные способности дуг обозначим r_{ij} , причем если дуга (i, j) отсутствует в транспортной сети, положим, что $r_{ij} = 0$, $i=1, \dots, n-1; j=2, \dots, n; i \neq j$. Имеем:

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} \rightarrow \max; \quad (8.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ji} - \sum_{j=2}^n x_{ij} = 0; \quad i=2, \dots, n-1; \quad j \neq i; \quad (p_i). \quad (8.11)$$

$$x_{ij} \leq r_{ij}; \quad i=1, \dots, n-1; j=2, \dots, n; i \neq j; \quad (w_{ij}). \quad (8.12)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i=1, \dots, n-1; j=2, \dots, n; i \neq j. \quad (8.13)$$

Обозначим через p_i , $i=2, \dots, n-1$ переменные двойственной задачи, соответствующие ограничениям (8.11). Переменные, соответствующие ограничениям (8.12), обозначим w_{ij} , $i=1, \dots, n-1; j=2, \dots, n; i \neq j$.

Математическая модель двойственной задачи такова:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n r_{ij} w_{ij} \rightarrow \min \quad (i \neq j); \quad (8.14)$$

$$-p_i + p_j + w_{ij} \geq 0; \quad i=2, \dots, n-1; j=2, \dots, n-1; i \neq j; (x_{ij}, i \neq j) \quad (8.15)$$

$$p_i + w_{1i} \geq 1; \quad i=2, \dots, n-1; \quad (x_{1i}) \quad (8.16)$$

$$-p_i + w_{in} \geq 0; \quad i=2, \dots, n-1; \quad (x_{in}) \quad (8.17)$$

$$w_{ij} \geq 0. \quad (8.18)$$

Положим

$$p_i = \begin{cases} 1, & i \in R \\ 0, & i \in \bar{R} \end{cases}, \quad i=2, \dots, n-1.$$

Иначе говоря, $p_i = 1$, если вершина i помечена, $p_i = 0$, если вершина i не помечена. Поэтому $p(1) = 1$; $p(n) = 0$, так как источник помечен, а сток не помечен.

Положим

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in (R, \bar{R})^* \\ 0, & (i, j) \notin (R, \bar{R})^* \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1; j = 2, \dots, n; i \neq j.$$

Покажем, что построено допустимое решение задачи (8.14) – (8.18).

Пусть $p_i = 1$, $p_j = 0$. Тогда вершина i помечена, вершина j не помечена. Значит, дуга (i, j) принадлежит разрезу $(R, \bar{R})^*$, поэтому $w_{ij} = 1$, $-p_i + p_j + w_{ji} = 0$.

Пусть $p_i = 0$. Значит, вершина i не помечена, тогда дуга $(1, i)$ принадлежит разрезу $(R, \bar{R})^*$, следовательно, $w_{1i} = 1$, $p_i + w_{1i} = 1$.

Пусть $w_{1i} = 0$, тогда вершина i помечена, что влечет $p_i = 1$, $p_i + w_{1i} = 1$.

Пусть $p_i = 1$, тогда вершина i – помечена, но сток не помечен, поэтому $w_{in} = 1$, $-p_i + w_{in} = 0$.

Осталось показать, что выполнены условия дополняющей нежесткости.

Пусть $x_{ij} > 0$, $i \neq 1$, $j \neq n$. Разберем 4 случая.

1. Вершина i помечена, вершина j помечена. Тогда $p_i = 1$, $p_j = 1$, $w_{ij} = 0$; $-p_i + p_j + w_{ij} = 0$.
2. Вершина i не помечена, вершина j помечена. Случай невозможен, вершина i по обратной дуге метится от вершины j , ведь $x_{ij} > 0$.
3. Вершина i помечена, вершина j не помечена. Тогда $p_i = 1$, $p_j = 0$, $w_{ij} = 1$; $-p_i + p_j + w_{ij} = 0$.
4. Вершина i не помечена, вершина j не помечена. Тогда $p_i = 0$, $p_j = 0$, $w_{ij} = 0$; $-p_i + p_j + w_{ij} = 0$.

Пусть $x_{1i} > 0$. Источник помечен, возможны два случая

1. Вершина i помечена, тогда $p_i = 1$, $w_{1i} = 0$; $p_i + w_{1i} = 1$.
2. Вершина i не помечена, тогда $p_i = 0$, $w_{1i} = 1$; $p_i + w_{1i} = 1$.

Пусть $x_{in} > 0$. Сток не помечен, возможны два случая

1. Вершина i помечена, тогда $p_i = 1$, $w_{1i} = 1$; $-p_i + w_{1i} = 0$.
2. Вершина i не помечена, тогда $p_i = 0$, $w_{1i} = 0$; $-p_i + w_{1i} = 0$.

Итак, $\sum_{j=2}^n x_{1j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n r_{ij} w_{ij}$; $v^* = (R, \bar{R})^*$. Теорема доказана.

8.4. Алгоритм Форда – Фалкерсона решения задачи о максимальном потоке (метод расстановки пометок)

Алгоритм Форда – Фалкерсона решения задачи о максимальном потоке следует непосредственно из доказательства теоремы Форда – Фалкерсона. В нем осуществляется систематический поиск увеличивающих цепей из источника в сток по правилу (8.9). Как только не удастся найти увеличивающую цепь, алгоритм прекращает работу: в сети построен максимальный поток.

Формальное описание алгоритма.

Шаг 1. Пометить вершину s меткой $(0, \infty)$.

Шаг 2. Выбрать любую помеченную вершину V_i (первоначально это единственная вершина s). Рассмотреть все непомеченные вершины V_j , связанные дугами с вершиной V_i . Тем вершинам V_j , для которых $x(V_i, V_j) < r(V_i, V_j)$, приписать метку (V_i^+, E_{Vj}) , где $E_{Vj} = \min[E_{Vi}, r(V_i, V_j) - x(V_i, V_j)]$. Тем вершинам V_j , для которых $x(V_j, V_i) > 0$, приписать метку (V_i^-, E_{Vj}) , где $E_{Vj} = \min[E_{Vi}, x(V_j, V_i)]$.

Шаг 3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока:

- а) или окажется помеченной вершина t ;
- б) или все возможные метки проставлены, а вершина t осталась непомеченной.

В случае а) перейти к шагу 4, а в случае б) – к шагу 6.

Шаг 4. Найдена увеличивающая цепь, по которой из источника в сток можно переслать дополнительные единицы потока. Восстановить эту увеличивающую цепь, ориентируясь по меткам вершин, начиная с вершины t . Увеличить потоки на всех прямых дугах этой цепи на E_t , уменьшить потоки на всех обратных дугах этой цепи на E_t , где E_t – вторая часть метки вершины t .

Шаг 5. Стереть все пометки, кроме метки источника, и возвратиться к шагу 2.

Шаг 6. В транспортной сети построен максимальный поток. Множество дуг, ведущих из помеченных вершин в непомеченные, образует минимальный разрез. Конец.

Пример Найдем максимальный поток в сети, показанной на рисунке 8.2. Для уменьшения количества итераций начнем с ненулевого допустимого потока (рис. 8.5).

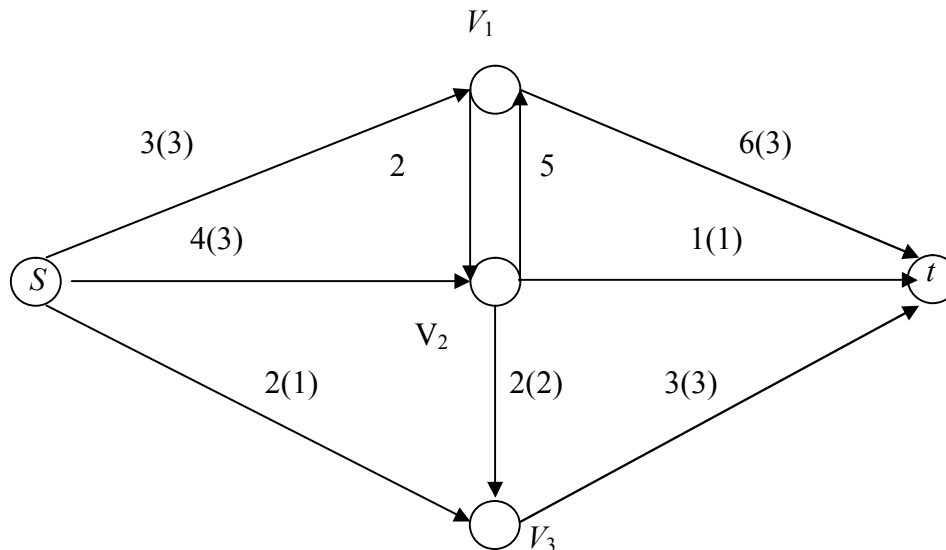


Рис. 8.5. Транспортная сеть с начальным потоком величины 7

Шаг 1. Метим источник меткой $(0, \infty)$.

Шаг 2. Из вершины s можно пометить вершину V_2 меткой $(s^+, \min(\infty; 4 - 3)) = (s^+, 1)$ и вершину V_3 меткой $(s^+, \min(\infty; 2 - 1)) = (s^+, 1)$. Из вершины V_2 помечается вершина V_1 меткой $(V_2^+, \min(1; 5 - 0)) = (V_2^+, 1)$. Из вершины V_1 метится вершина t меткой $(V_1^+, \min(1; 6 - 3)) = (V_1^+, 1)$ (рис. 8.6).

Шаг 3. Найдена увеличивающая цепь. Вершина t помечена от вершины V_1 , вершина V_1 – от вершины V_2 , а вершина V_2 – от вершины s . Причем все вершины помечены по прямым дугам.

Шаг 4. Увеличивающая цепь имеет вид $s \rightarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow t$; $E_t = 1$. На каждой дуге увеличивающей цепи величина потока возрастает на 1 (рис. 8.7).

Шаг 5. Стираем все пометки и возвращаемся к шагу 1 (рис. 8.8).

Шаг 2. От вершины s можно пометить вершину V_3 меткой $(s^+, 1)$. От вершины V_3 по обратной дуге можно пометить вершину V_2 меткой $(V_3^-, \min(1; 2)) = (V_3^-, 1)$. От вершины V_2 по прямой дуге метится вершина V_1 меткой $(V_2^+, 1)$, а от вершины V_1 метится сток меткой $(V_1^+, 1)$ (рис. 8.8).

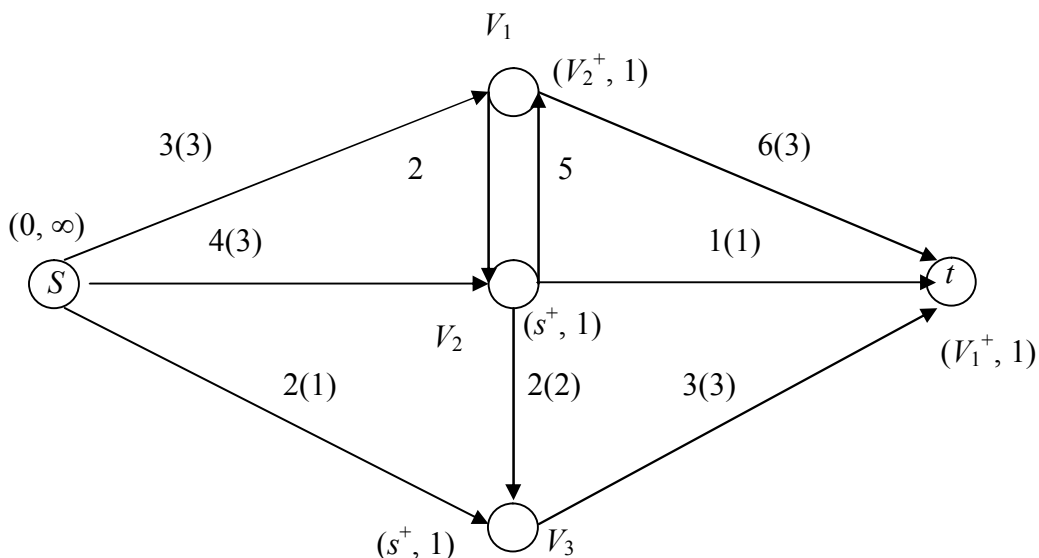


Рис. 8.6. Расстановка меток по алгоритму Форда – Фалкерсона

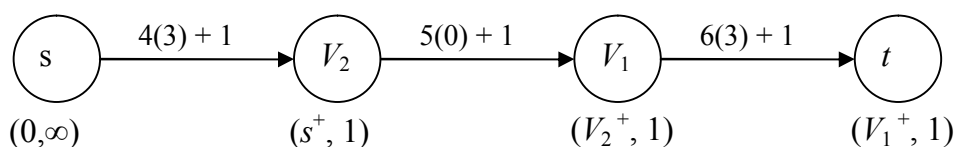


Рис. 8.7. Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

Шаг 3. Вершина t получила пометку, следовательно, поток в сети можно увеличить.

Шаг 4. Увеличивающая цепь имеет вид $s \rightarrow V_3 \leftarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow t$. По ней можно увеличить поток на 1 (рис. 8.9).

Шаг 5. Стираем все пометки и возвращаемся к шагу 1 (рис. 8.10).

Шаг 2. Все дуги, выходящие из источника, насыщены. Ни одной из вершин нельзя приписать метку. Следовательно, найден максимальный поток. Множество R помеченных вершин содержит единственную вершину s , $R = \{s\}$. Тогда $\bar{R} = \{V_1, V_2, V_3, t\}$. Минимальный разрез $(R, \bar{R})^*$ составляют дуги $(R, \bar{R})^* = \{(s, V_1), (s, V_2), (s, V_3)\}$, $r(R, \bar{R})^* = 3+4+2 = 9 = v^*$. Конец.

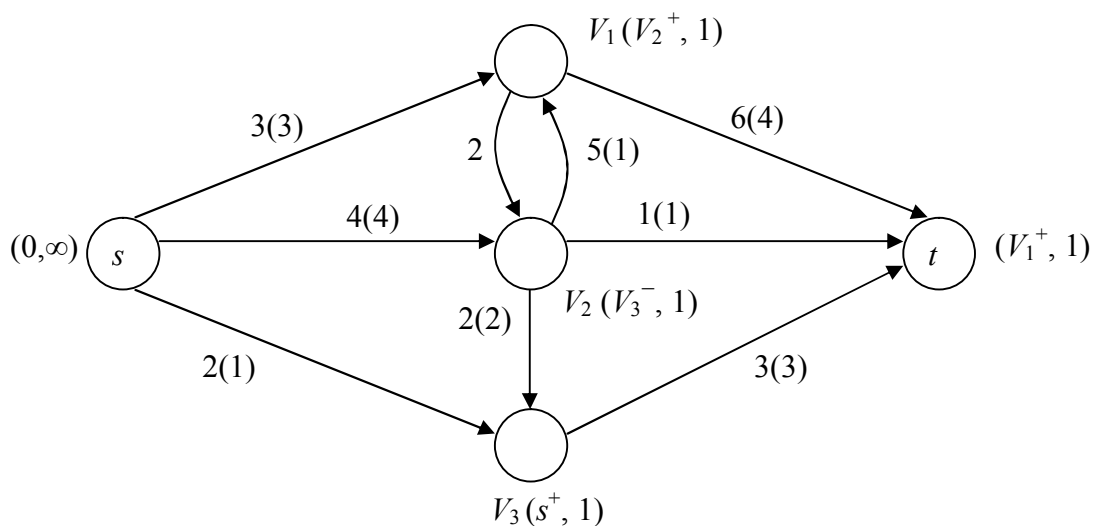


Рис. 8.8. Расстановка меток по алгоритму Форда – Фалкерсона

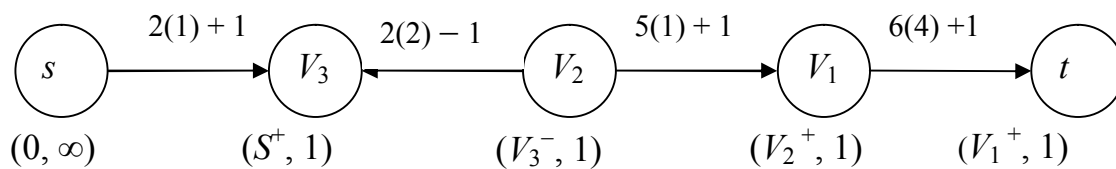


Рис. 8.9. Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

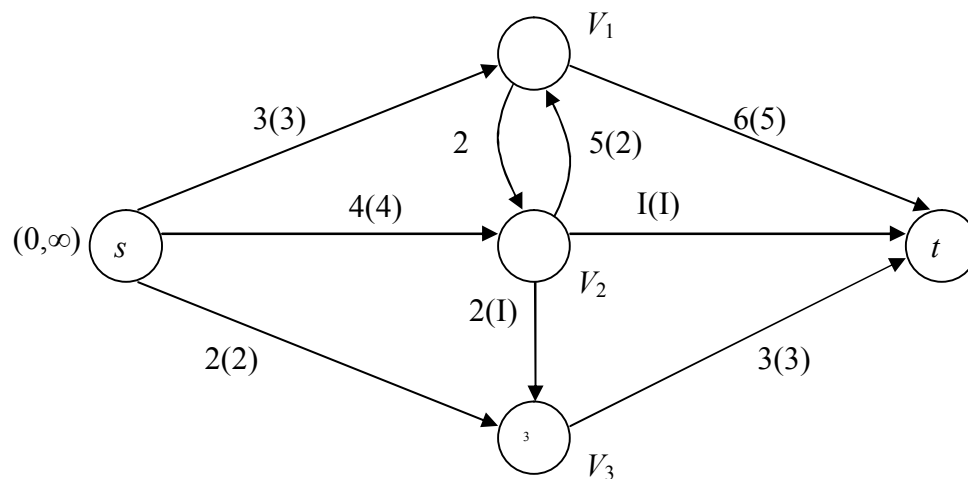


Рис. 8.10. Максимальный поток, $v^* = 9$

8.5. Алгоритм Форда–Фалкерсона для транспортной сети, имеющей вид двудольного графа

Если транспортная сеть после удаления из нее источника и стока вместе с инцидентными им дугами представляет собой ориентированный двудольный граф, ее можно компактно представить в виде таблицы так же, как при решении задачи о наибольшем паросочетании. Только вместо единиц в допустимых клетках будем записывать пропускные способности дуг и проставлять эти числа в правом верхнем углу, а в центре будем проставлять величину потока по данной дуге, если она больше нуля. В клетках крайнего левого столбца запишем номера вершин из множества V_a в левом верхнем углу, а в правом верхнем углу запишем пропускные способности дуг (s, V_i) , $V_i \in V_a$. В центре клетки проставим ненулевые потоки по этим дугам.

В клетках верхней строки, где раньше записывались номера вершин из множества V_b , перенесем эти номера в левый верхний угол. Пропускные способности дуг (V_j, t) , $V_j \in V_b$ запишем в правом верхнем углу, в центре клетки запишем ненулевые потоки по этим дугам. Положим, что все дуги двудольного графа начинаются в вершинах множества V_a и кончаются в вершинах множества V_b .

Пример транспортной сети приведен на рис. 8.11. Соответствующая ей таблица – табл. 8.1.

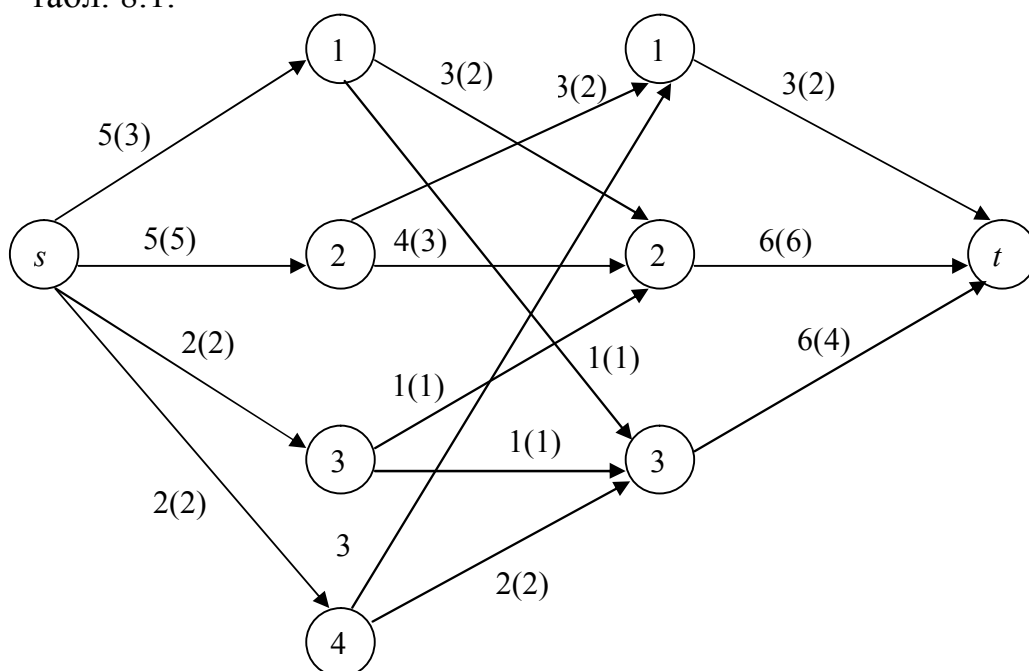


Рис. 8.11. Пример транспортной сети

Таблица 8.1

j	1	3	2	6	3	6
i	2	6	4			
1	5		3	1		
	3		2	1		
2	5	3	4			
	5	2	3			
3	2		1	1		
	2		1	1		
4	2	3		2		
	2			2		

Приведем теперь без дальнейших пояснений табличную форму алгоритма Форда – Фалкерсона отыскания максимального потока.

Шаг 1. Пометить каждую строку i , для которой разность $r(s, i) - x(s, i)$ больше 0, меткой (s^+, E_i) , где $E_i = r(s, i) - x(s, i)$. Если ни одной такой метки приписать нельзя, данный поток – максимальный. Конец.

Шаг 2. Пометить каждый непомеченный столбец j , содержащий допустимую клетку в помеченной строке i , такую, что $r(i, j) - x(i, j)$ больше 0 меткой (s^+, E_j) , где $E_j = \min(E_i, r(i, j) - x(i, j))$. Если возможностей несколько, выбрать любую.

Шаг 3. Пометить каждую непомеченную строку i , содержащую допустимую клетку с ненулевым потоком в помеченном столбце j , меткой (j^-, E_j) , где $E_j = \min(E_j, x(i, j))$. Если возможностей несколько, выбрать любую.

Шаг 4. Повторять шаги 2 и 3 до тех пор, пока

- а) не будет помечен столбец j с разностью $r(j, t) - x(j, t) > 0$ или
- б) или новых пометок приписать нельзя и для всех помеченных столбцов $r(j, t) = x(j, t)$. В случае а) перейти к шагу 5, в случае б) – к шагу 6.

Шаг 5. Найдена увеличивающая цепь от s в t . Восстановить эту цепь, ориентируясь по меткам строк и столбцов. Увеличить потоки на всех прямых дугах этой цепи и уменьшить потоки на всех обратных дугах этой цепи на величину $E_m = \min(E_j, r(j, t) - x(j, t))$. Стереть все пометки и возвратиться к шагу 1.

Шаг 6. Данный поток максимален. Помеченные строки и столбцы соответствуют вершинам множества R минимального разреза.

Найдем максимальный поток для транспортной сети, показанной на рис. 8.11 (табл. 8.2).

Шаг 1. Метим первую строку меткой $(s^+, 5 - 3) = (s^+, 2)$.

Шаг 2. Метим второй столбец меткой $(1^+, \min(2; 3 - 2)) = (1^+, 1)$.

Шаг 3. От второго столбца помечаются строки 2 и 3. Метка второй строки: $(2^-, \min(1; 3)) = (2^-, 1)$. Метка третьей строки: $(2^-, \min(1; 1)) = (2^-, 1)$.

Шаг 2. От второй строки можно пометить первый столбец меткой $(1^+, \min(1; 3 - 2)) = (1^+, 1)$. Но поток на дуге $(2, t)$ равен 2, а ее пропускная способность равна 3, следовательно, найдена увеличивающая цепь (рис. 8.12), вдоль которой можно увеличить поток на 1. Определим вершины этой цепи. Сток метится от первого столбца. Первый столбец помечен от первой строки, вторая строка помечена от второго столбца, второй столбец помечен от первой строки, первая строка помечена от источника (табл. 8.2).

Таблица 8.2

		$(2^+, 1)$		$(1^+, 1)$	
	j	1	3	2	6
	i	2^+		6	4
$(s^+, 2)$	1	5		3	1
	3^+			2^+	1
$(2^-, 1)$	2	5	3	4	
	5	2^+		3^-	
$(2^-, 1)$	3	2		1	1
	2			1	1
	4	2	3		2
	2				2

Отметим знаком «+» потоки на прямых дугах и знаком «-» потоки на обратных дугах найденной увеличивающей цепи. Прибавим к потокам, отмеченным знаком плюс, и вычтем из потоков, отмеченных знаком минус, единицу (рис. 8.12). Величина потока в транспортной сети увеличится на 1.

Попытаемся снова увеличить поток (табл. 8.3).

Шаг 1. Первая строка получает метку $(s^+, 1)$.

Шаг 2. От первой строки нельзя пометить ни один столбец, так как все дуги, выходящие из первой вершины множества V_a , насыщены. Следовательно, величина максимального потока равна

$$v^* = 4 + 5 + 2 + 2 = 3 + 6 + 4 = 13.$$

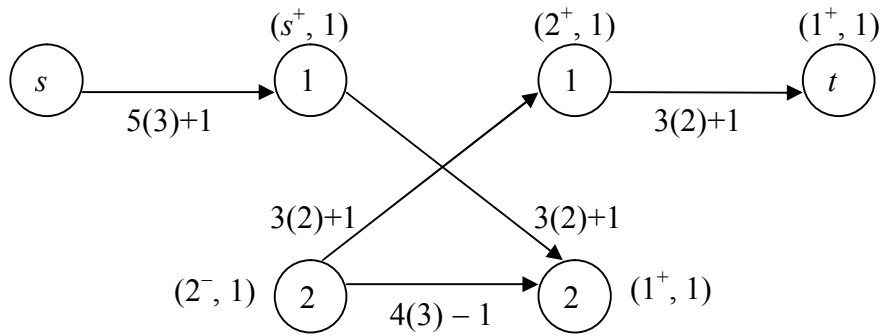


Рис. 8.12. Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

Таблица 8.3

		1 3		2 6		3 4	
		3		6		4	
$(s^+, 1)$	1 5			3		1	
	4			3		1	
	2 5	3		4			
	5	3		2			
	3 2			1		1	
	2			1		1	
	4 2	3				2	
	2					2	

Дуги минимального разреза и вершины множества R показаны на рис. 8.13 жирными линиями. Пропускная способность минимального разреза равна сумме $5 + 2 + 2 + 3 + 1 = 13 = v^*$.

В дальнейшем мы будем решать подобные задачи для более простого случая, когда пропускные способности дуг двудольного графа так велики, что их можно положить равными ∞ . Тогда вместо символа ∞ в правом верхнем углу допустимой клетки будем писать знак «х» – признак допустимости. Шаг 2 упростится и будет таким:

Шаг 2. Пометить каждый непомеченный столбец j , содержащий допустимую клетку в помеченной строке i , меткой (i^+, E_i) .

Как и в случае задачи о наибольшем паросочетании, доказывается, что при исходе б) шага 4 непомеченные строки и помеченные столбцы покрывают все допустимые клетки. В минимальный разрез входят, очевидно, только дуги с конечной пропускной способностью, т.е. имеющие вид (s, i) , (j, t) . Кроме того, ясно, что минимальный разрез

составляют все дуги вида (s, i) или (j, t) , где строка с номером i не помечена, а столбец с номером j помечен. И тогда

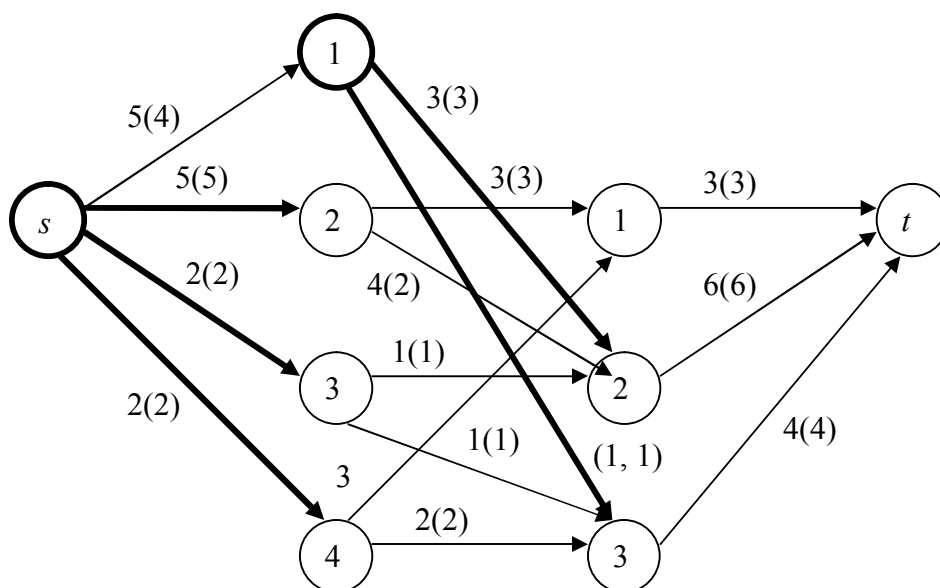


Рис. 8.13. Максимальный поток и минимальный разрез

$$r^*(R, \bar{R}) = \sum_{i-\text{не пом}} r(s, i) + \sum_{j-\text{пом}} r(j, t) = \sum_{i-\text{не пом}} x(s, i) + \sum_{j-\text{пом}} x(j, t). \quad (8.19)$$

8.6. Венгерский алгоритм решения транспортной задачи

Напомним математическую модель задачи, двойственной транспортной.

Максимизировать целевую функцию

$$W = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max; \quad (8.20)$$

при условиях

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.21)$$

Воспользуемся условиями дополняющей нежесткости.

Допустимые решения $\bar{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ и $\bar{y} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ ТЗ и двойственной ей задачи оптимальны тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$x_{ij}(u_i + v_j - c_{ij}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.22)$$

Положим, что затраты c_{ij} занесены в матрицу затрат C размерности $m \times n$.

Пусть найдено допустимое решение $\bar{y} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ задачи (8.21) – (8.22). Выделим в матрицу затрат те клетки (c_{ij}) , для которых $u_i + v_j = c_{ij}$. Будем считать эти клетки допустимыми, построим соответствующую транспортную сеть (рис. 8.11) и решим для этой сети задачу о максимальном потоке.

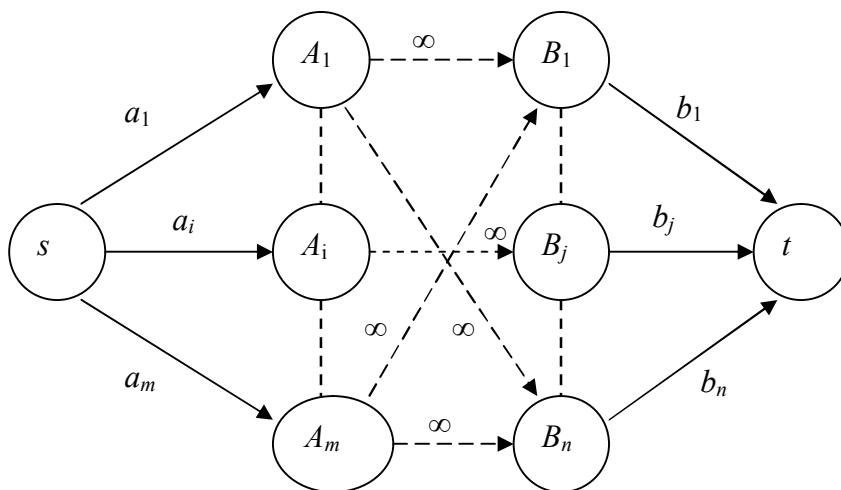


Рис. 8.14. Транспортная сеть, соответствующая ТЗ

Правило построения сети: источник s соединен с каждой вершиной A_i дугой (s, A_i) с пропускной способностью, равной a_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Каждая вершина B_j соединена со стоком t дугой (B_j, t) с пропускной способностью, равной b_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Если справедливо равенство $c_{ij} = u_i + v_j$, то в транспортной сети есть дуга (A_i, B_j) с пропускной способностью, равной ∞ , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Возможны два случая:

а) все дуги, выходящие из источника (соответственно все дуги, входящие в сток), насыщены. Это значит, что все запасы вывезены (все потребности удовлетворены). Тогда неизвестные перевозки x_{ij} просто равны потокам на соответствующих дугах двудольного графа. При этом получено оптимальное решение транспортной задачи, потому что для имеющихся допустимых решений $\bar{x}, \bar{y}$ пары двойственных задач выполнены условия дополняющей нежесткости;

б) не все запасы вывезены (соответственно не все потребности удовлетворены). Тогда, как следует из (8.19),

$$v^* = r(R, \bar{R})^* = \sum_{i-\text{не пом}} x(s, i) + \sum_{j-\text{пом}} x(j, t) = \sum_{i-\text{не пом}} a_i + \sum_{j-\text{пом}} b_j < \sum_{i=1}^m a_i.$$

$$\text{Отсюда } \sum_{i-\text{пом}} a_i - \sum_{j-\text{пом}} b_j > 0.$$

В этом случае решение $\bar{y}$ задачи (8.21) – (8.22) можно улучшить так же, как при решении ЗН.

Прочеркнем в матрице затрат непомеченные строки и помеченные столбцы. Все допустимые клетки вычеркнутся, в матрице останутся только такие стоимости c_{ij} , для которых $c_{ij} > u_i + v_j$. Положим $h = \min(c_{ij} - u_i - v_j)$, если строка i помечена, а столбец j не помечен, тогда $h > 0$.

Пересчитаем значения двойственных переменных по правилу

$$\begin{aligned} u'_i &= \begin{cases} u_i + h, & \text{если строка } i \text{ помечена;} \\ u_i, & \text{если строка } i \text{ не помечена, } i = 1, \dots, m. \end{cases} \\ v'_j &= \begin{cases} v_j - h, & \text{если столбец } j \text{ помечен;} \\ v_j, & \text{если столбец } j \text{ не помечен, } j = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Допустимость нового решения очевидна. Вычислим значение целевой функции на нем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i u'_i + \sum_{j=1}^n b_j v'_j &= \sum_{i=1}^m a_i u_i + h \left(\sum_{i-\text{пом}} a_i - \sum_{j-\text{пом}} b_j \right) + \sum_{j=1}^n b_j v_j > \\ &> \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j. \end{aligned}$$

Итак, на новом решении $\bar{y}' = (u'_1, \dots, u'_m, v'_1, \dots, v'_n)$ целевая функция двойственной задачи увеличилась.

Снова найдем в матрице стоимостей те клетки, для которых $c_{ij} > u_i + v_j$, снова решим задачу о максимальном потоке и т.д. Если c_{ij} – целые числа, то и значения двойственных переменных (потоки на дугах) можно выбрать целыми. Тогда значение целевой функции двойственной задачи каждый раз будет увеличиваться на целое число. Через конечное число шагов будет найдено оптимальное решение двойственной задачи и максимальное значение ее функции. Параллельно найдутся оптимальные перевозки, минимизирующие затраты.

Формальное описание алгоритма

Шаг 1. Найти исходное допустимое решение двойственной задачи, положив $u_i = \min_j c_{ij}$, ($i = 1, \dots, m$); $v_j = \min_i (c_{ij} - u_i)$, ($j = 1, \dots, n$).

При таком допустимом решении в каждой строке и каждом столбце матрицы затрат появится, по крайней мере одна допустимая клетка.

Шаг 2. Положить $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Шаг 3. Решить задачу о максимальном потоке, считая допустимыми клетки с нулями в матрице C' . Возможны два случая:

- а) все потребности удовлетворены;
- б) не все потребности удовлетворены.

В случае а) перейти к шагу 6, в случае б) – к шагу 4.

Шаг 4. Прочеркнуть в матрице стоимостей C' непомяченные строки и помеченные столбцы (покрывающее множество рядов) и найти минимальный элемент h в оставшейся части матрицы ($h > 0$).

Шаг 5. Пересчитать двойственные переменные по правилу (8.14). Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Положить $x_{ij}=0$, если дуги (A_i, B_j) нет в транспортной сети или поток на ней равен 0. В противном случае положить $x_{ij}=x(A_i, B_j)$. Оптимальные значения перевозок найдены. Конец.

Для удобства вычислений шаг 5 формулируется по-другому.

Шаг 5. Вычесть h из всех непрочеркнутых элементов матрицы стоимостей C' и прибавить к дважды прочеркнутым. Перейти к шагу 3.

Решим ТЗ, заданную в табл. 8.4.

$$\sum_{i=1}^5 a_i = \sum_{j=1}^6 b_j = 270, \text{ ТЗ закрыта.}$$

Таблица 8.4

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	6	5	4	7	6	8	90
A_2	7	6	5	9	6	5	20
A_3	8	5	6	6	3	8	30
A_4	6	7	5	7	4	9	50
A_5	5	4	7	8	5	2	80
Потребности	40	60	80	30	10	50	—

Шаг 1. Определяем допустимое решение двойственной задачи.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \min_j c_{1j} = \min(6, 5, 4, 7, 6, 8) = 4; & u_2 &= \min_j c_{2j} = 5; \\
u_3 &= \min_j c_{3j} = 3; & u_4 &= \min_j c_{4j} = 4; & u_5 &= \min_j c_{5j} = 2; \\
v_1 &= \min_i (c_{i1} - u_i) = \min(6 - 4, 7 - 5, 8 - 3, 6 - 4, 5 - 2) = 2; \\
v_2 &= \min_i (c_{i2} - u_i) = \min(5 - 4, 6 - 5, 5 - 3, 7 - 4, 4 - 2) = 1; \\
v_3 &= \min_i (c_{i3} - u_i) = 0; & v_4 &= \min_i (c_{i4} - u_i) = 3; & v_5 &= \min_i (c_{i5} - u_i) = 0; \\
v_6 &= \min_i (c_{i6} - u_i) = 0.
\end{aligned}$$

Исходное значение целевой функции двойственной задачи таково:

$$\begin{aligned}
W &= 4 \times 90 + 5 \times 20 + 3 \times 30 + 4 \times 50 + 2 \times 80 + 2 \times 40 + 1 \times 60 + \\
&+ 3 \times 30 = 1140.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Вычисляем $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Результаты расчетов приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

v_j u_i	2	1	0	3	0	0
4	0	0	0	0	2	4
5	0	0	0	1	1	1
3	3	1	3	0	0	5
4	0	2	1	0	0	5
2	1	1	5	3	3	0

Шаг 3. Решим задачу о максимальном потоке, считая допустимыми клетки с нулями. Ход решения отражен в табл. 8.6.

Для сокращения числа итераций начальный поток взят ненулевым. Не вывезены запасы 4-го и 5-го поставщиков. У первого поставщика осталось 40, у второго – 30 единиц продукта. Метим четвертую и пятую строки соответственно метками $(s^+, 40)$ и $(s^+, 30)$. От четвертой строки по допустимым клеткам метятся 1, 4, 5-й столбцы меткой $(4^+, 40)$. От пятой строки метится по допустимой клетке 6-й столбец меткой $(5^+, 30)$.

От первого столбца по допустимой клетке с ненулевым потоком 40 метится первая строка меткой $(1^-, \min(40, 40)) = (1^-, 40)$.

От четвертого столбца по допустимой клетке с ненулевым потоком 30 метится третья строка меткой $(4^-, \min(40, 30)) = (4^-, 30)$.

От пятого и шестого столбцов нельзя пометить ни одной строки. От помеченной первой строки метятся 2-й и 3-й столбцы меткой $(1^+, 40)$. Но третий потребитель недополучил 70 единиц товара. Найдена увеличивающая цепь. Восстановим ее (рис. 8.12).

Третий столбец по прямой дуге помечен от первой строки; 1-я строка по обратной дуге помечена от 1-го столбца; 1-й столбец по прямой дуге помечен от четвертой строки; 4-я строка помечена от источника. Сток метится от 3-го столбца меткой $(3^+, \min(40, 80 - 10)) = (3^+, 40)$. В табл. 8.6 прямые дуги цепи отмечены знаком «+», обратные – знаком «-».

Таблица 8.6

$(4^+, 40) (1^+, 40) (1^+, 40) (4^+, 40) (4^+, 40) (5^+, 30)$

i j			1	2	3	4	5	6
			40 40	60 60	80 10+	30 30	10 10	50 50
$(1^-, 40)$	1	90 90	x 40-	x 50	x +	x		
	2	20 20	x	x 10	x 10			
$(4^-, 30)$	3	30 30				x 30	x	
$(s^+, 40)$	4	50 10+	x +			x	x 10	
$(s^+, 30)$	5	80 50						x 50

Увеличиваем поток на прямых дугах на 40 единиц и уменьшаем поток на обратной дуге на 40 единиц (табл. 8.7).

Пытаемся снова увеличить поток. Пятая строка получает метку $(s^+, 30)$, от нее 6-й столбец получает метку $(5^+, 30)$. Больше ничего отметить нельзя. Для данной транспортной сети найден максимальный поток, но не все запасы 5-го поставщика вывезены (соответственно 3-й потребитель недополучил 30 единиц груза). Можно улучшить решение двойственной задачи.

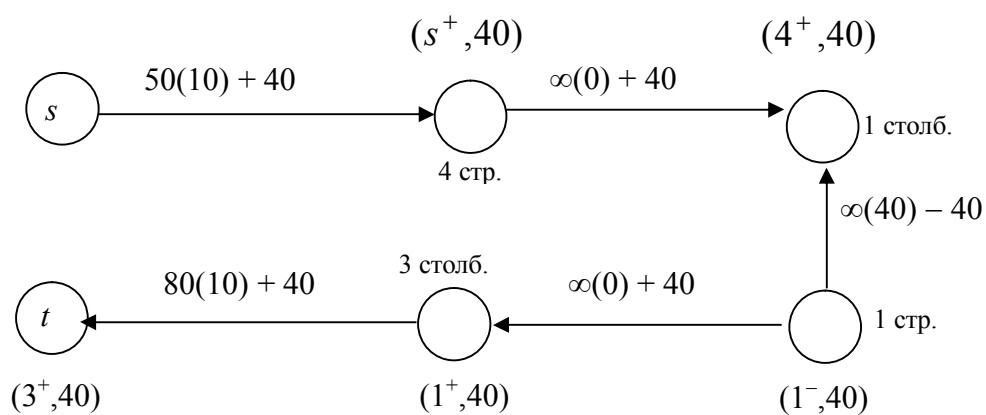


Рис. 8.15. Увеличение потока вдоль увеличивающей цепи

Таблица 8.7

$(5^+, 30)$

j	i		1	2	3	4	5	6
			40 40	60 60	80 50	30 30	10 10	50 50
1		90 90	x	x 50	x 40	x		
2		20 20	x	x 10	x 10			
3		30 30				x 30	x	
4		50 50	x 40			x	x 10	
5	$(s^+, 30)$	80 50						x 50

Шаг 4. Перечеркиваем в матрице стоимостей C' (табл. 8.5) непомеченные 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки и помеченный 6-й столбец. Минимальный элемент в оставшейся части таблицы равен 1.

Прибавим единицу к дважды прочеркнутым элементам и вычтем единицу из непрочеркнутых элементов (табл. 8.8).

Вычислим изменение целевой функции двойственной задачи.

$$\Delta W = h \left(\sum_{i-\text{пом}} a_i - \sum_{j-\text{пом}} b_j \right) = 1(80 - 50) = 30.$$

На новом допустимом решении двойственной задачи значение целевой функции равно $1140 + 30 = 1170$.

Таблица 8.8

v_j u_i	2	1	0	3	0	-1
4	0	0	0	0	2	5
5	0	0	0	1	1	2
3	3	1	3	0	0	6
4	0	2	1	0	0	6
3	0	0	4	2	2	0

В табл. 8.8 указаны также новые значения двойственных переменных, определенные в соответствии с (8.14)

Снова переходим к шагу 2 (табл. 8.9). Мы начинаем с потока, который был построен как максимальный на предыдущей итерации.

Пятая строка получает метку $(s^+, 30)$. От нее меткой $(5^+, 30)$ метятся 1, 2, 6-й столбцы. От 2-го столбца меткой $(2^-, 30)$ метится первая строка. От 1-й строки можно пометить меткой $(1^+, 30)$ 3-й столбец, от которого меткой $(3^+, \min(30, 80 - 50)) = (3^+, 30)$ метится сток. На самом деле меток можно поставить больше, все они указаны в табл. 8.9, но мы показали только, как метятся вершины увеличивающей цепи, по которой можно увеличить поток на 30 единиц. Прямые дуги этой цепи: $(s, 5 \text{ стр.})$, $(5 \text{ стр.}, 2 \text{ столб.})$, $(1 \text{ стр.}, 3 \text{ столб.})$, $(3 \text{ столб.}, t)$. Обратная дуга одна – $(1 \text{ стр.}, 2 \text{ столб.})$. Увеличиваем поток на прямых дугах и уменьшаем поток на обратной дуге на 30 единиц (табл. 8.10).

Все запасы вывезены, все потребности удовлетворены. Оптимальные перевозки следующие: $x_{12} = 20$, $x_{13} = 70$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 10$, $x_{34} = 30$, $x_{41} = 40$, $x_{45} = 10$, $x_{52} = 30$, $x_{56} = 50$. Остальные перевозки равны нулю.

Оптимальное решение двойственной задачи:

$$u_1=4, u_2=5, u_3=3, u_4=4, u_5=3, v_1=2, v_2=1, v_3=0, v_4=3, v_5=0, v_6=-1.$$

Оптимальность найденных решений следует из условий дополняющей нежесткости.

Оптимальное значение целевой функции ТЗ равно

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij} = 5 \times 20 + 4 \times 70 + 6 \times 10 + 5 \times 10 + 6 \times 30 + 6 \times 40 + 4 \times 10 + 30 \times 4 + 2 \times 50 = 1170.$$

Для контроля вычислим значение целевой функции двойственной задачи по значениям двойственных переменных:

$$\sum_{i=1}^5 a_i u_i + \sum_{j=1}^6 b_j v_j = 90 \times 4 + 20 \times 5 + 30 \times 3 + 50 \times 4 + 80 \times 3 + 40 \times 2 + \\ + 60 \times 1 + 80 \times 0 + 30 \times 3 + 10 \times 0 + 50 \times (-1) = 1170.$$

Разумеется, значения целевых функций совпали.

Таблица 8.9

$(5^+, 30)$ $(5^+, 30)$ $(1^+, 30)$ $(4^+, 30)$ $(4^+, 30)$ $(5^+, 30)$

		i j		1	2	3	4	5	6
				40 40	60 60	80 50+	30 30	10 10	50 50
$(2^-, 30)$	1	90 90	x	x	x	x			
$(2^-, 10)$	2	20 20	x	x	x				
	3	30 30				x 30	x		
$(1^-, 30)$	4	50 50	x			x	x	10	
$(s^+, 30)$	5	80 50+	x	x					x 50

Таблица 8.10

i j		1	2	3	4	5	6
		40 40	60 60	80 80	30 30	10 10	50 50
1	90 90	x	x 20	x 70	x		
2	20 20	x	x 10	x 10			
3	30 30				x 30	x	
4	50 50	x 40			x	x 10	
5	80 80	x	x 30				x 50

8.7. Задачи

1. Компания реализует продукцию в 5 регионах. Покупательные способности жителей этих регионов различны и оцениваются (условные единицы) так:

Регион	1	2	3	4	5
Покупательная способность	80000	60000	50000	40000	20000

Профессиональный уровень пяти менеджеров различен. Предполагается, что доли реализуемых им покупательных способностей таковы:

Продавец	1	2	3	4	5
Доля	0,7	0,6	0,5	0,45	0,4

Как распределить продавцов по областям, чтобы максимизировать количество проданной продукции?

2. В определенный день компания по перевозке грузов должна забрать 5 грузов в пунктах A , B , C , D , E и доставить их в пункты a , b , c , d , e . Расстояния (мили) между пунктами загрузки и назначения таковы:

Пункты	$A-a$	$B-b$	$C-c$	$D-d$	$E-e$
Расстояния	60	30	100	50	40

Фирма располагает 5 грузовиками двух типов X и Y , которые находятся в пунктах S, T, U, V, W . Грузовики типа X расположены в пунктах S, U, V . Грузовики типа Y – в пунктах T, W . Грузовики типа X новее и экономичнее грузовиков типа Y . Стоимости пробега одной мили (центы), включая цену горючего, страховку, стоимость поддержки оборудования и т.п., таковы:

Тип грузовика	Пустой	Загруженный
X	20	40
Y	30	60

Расстояния от места стоянки грузовиков до мест назначения приведены в таблице.

Минимизировать общую стоимость перевозок.

Назначение Стоянка	A	B	C	D	E
S	30	20	40	10	20
T	30	10	30	20	30
U	40	10	10	40	10
V	20	20	40	20	30
W	30	20	10	30	40

В заданиях 3 и 4 задана матрица стоимостей ЗН. Нужно решить ЗН, максимизируя целевую функцию.

3.

9	20	60	15	21
38	76	69	49	60
28	13	80	28	34
58	34	13	37	25
30	3	53	21	20

4.

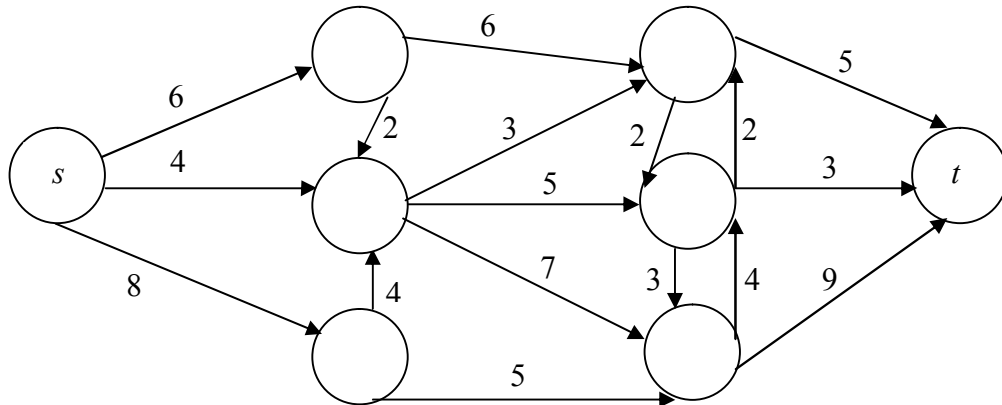
44	74	35	49	30
22	28	42	59	83
28	39	54	47	35
49	53	45	50	43
27	37	30	18	30

5. Модифицировать алгоритм поиска максимального потока в случае сети с несколькими источниками и стоками.

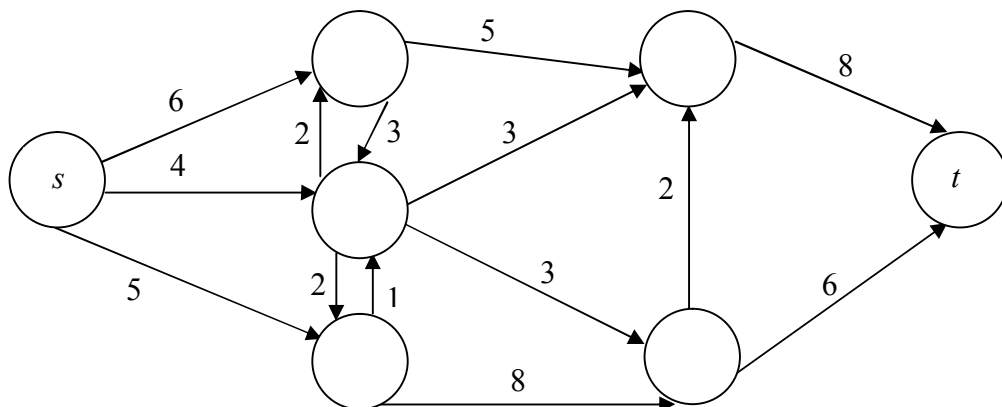
6. Поставим в соответствие каждой дуге (i, j) транспортной сети неотрицательные числа c_{ij} – стоимости пересылки единицы потока по дуге

(i, j) . Пусть требуется переслать из источника в сток v единиц потока. Сформулировать задачу нахождения потока минимальной стоимости как задачу линейного программирования. Построить ее математическую модель и модель двойственной задачи.

7. Найти максимальный поток и минимальный разрез для данной транспортной сети.



8. Найти максимальный поток и минимальный разрез для данной транспортной сети.



9. Решить ТЗ, используя венгерский алгоритм.

$a_i \backslash b_j$	50	100	200	200	150	150
250	9	5	2	1	10	6
150	8	1	2	4	10	7
200	7	8	4	3	5	3
250	9	3	5	8	4	8

10. Решить ТЗ, используя венгерский алгоритм. Запасы 3-го поставщика должны быть полностью вывезены.

b_j	200	50	50	200	100
a_i					
100	2	3	6	8	2
500	8	1	2	3	5
200	7	4	4	1	4

11. Решить ТЗ, используя венгерский алгоритм. Потребности 4-го потребителя должны быть полностью удовлетворены.

b_j	35	55	10	20	20
a_i					
50	3	6	2	4	2
30	4	2	9	6	5
50	8	7	5	3	3

Учебное издание

Ирина Абрамовна Палий

ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Редактор М.А. Тихонова

Подписано к печати .

Формат 60×90 1/16. Бумага писчая

Гарнитура Таймс

Оперативный способ печати

Усл.п.л._____ уч.- изд.л._____ Тираж 70 экз .

Заказ . Цена договорная

Издательство СибАДИ

644099, Омск, ул. П.Некрасова, 10

.....
Отпечатано в ПЦ издательства СибАДИ

644099, Омск, ул. П.Некрасова, 10